ملزمة

الرياضيات

Mathematics

للصف السادس الادبي

أعداد الأستاذ

عبدالسلام محمد علي

2016 - 2017

الفصل الاول

مبرهنة ذات الحدين

طرائق العد

مضروب العدد $n!$

التباديل P_r^n

التوافيق c_r^n

مبرهنة ذات الحدين

مدرس المادة عبدالسلام محمد

2016 - 2017

طرائق العد :-

مبدأ العد الأساسي :

لو فرضنا انه لدينا عدد من العمليات (الاختبارات) مقداره (k) وأمكن القيام بالعملية الأولى (n_1) وأمكن القيام بالعملية الثانية بعدد من الطرق مقداره (n_2) والعملية الثالثة بعدد من الطرق مقداره (n_3) .... والعملية من الرتبة (k) بعدد من الطرق مقداره (n_k) بحيث ان أجراء أي عملية لا يؤثر في أجراء أي من العمليات الأخرى فأنه يوجد عدد مقداره :

($n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k$) من النتائج (الطرق) الممكنة عندما تجري جميع العمليات (او الاختبارات) التي عددها (k) معاً

مثال١ / أعلن صاحب محل لبيع الدراجات الهوائية انه يوجد لديه خمسة انواع من الدراجات ومن كل نوع توجد ثلاثة أحجام ومن كل حجم يوجد ست دراجات فما عدد الدراجات في المحل ؟

الحل /

عدد الدراجات = 5 × 3 × 6 = 90 دراجة

مثال٢/ اعلن علي احد بائعي البدلات الرجالية ان لديه اكبر تشكيلة من البدلات حيث يوجد في محله (5) موديلات ومن كل موديل يوجد (10) قياسات مختلفة ومن كل قياس يوجد (7) ألوان مختلفة فما عدد البدلات الموجودة في المحل

الحل /

عدد البدلات = 5 × 10 × 7 = 350 بدلة

مثال٣/ اذا كان لدينا الحروف أ – ب – جـ – د – هـ – ز .كم كلمة (بمعنى او بدون معنى)يمكن تكوينها بحيث تكون مكونة من أربعة احرف على انه لا يسمح بتكرار الحرف في الكلمة الواحدة ؟

الحل /

عدد طرق اختيار الحرف الأول = 6

عدد طرق اختيار الحرف الثاني = 5

عدد طرق اختيار الحرف الثالث = 4

عدد طرق اختيار الحرف الرابع = 3

عدد الكلمات = 3 × 4 × 5 × 6 = 360 كلمة

مثال٤ /بكم طريقة يمكن تكوين عدد رمزه مكون من اربعة مراتب يمكن تكوينه من مجموعة الأرقام

{ 9 , 8 , 7 , 6 , 4 , 2 , 1} عندما (a) التكرار مسموح؟ (b) التكرار غير مسموح؟

الحل

(a) التكرار مسموح	(b) التكرار غير مسموح
عدد طرق اختيار رقم الاحاد = 7	**عدد طرق اختيار رقم الاحاد = 7**
عدد طرق اختيار رقم العشرات = 7	**عدد طرق اختيار رقم العشرات = 6**
عدد طرق اختيار رقم المئات = 7	**عدد طرق اختيار رقم المئات = 5**
عدد طرق اختيار رقم الألوف = 7	**عدد طرق اختيار رقم الألوف = 4**
عدد الطرق الكلي = 7 × 7 × 7 × 7	**عدد الطرق الكلي = 4 × 5 × 6 × 7**
2401 =	**840 =**

مثال٥/ اذا كان لدى فتاة (6) قمصان مختلفة الألوان (7) تنورات مختلفة الألوان أيضا و (4) أحذية مختلفة فبكم زي مختلف مكون من قميص وتنوره وحذاء

الحل /

عدد طرق اختيار القميص الواحد = 6

عدد طرق اختيار التنورة الواحدة = 7

عدد طرق اختيار الحذاء الواحد = 4

عدد الأزياء التي تظهر بها الفتاة = 4 × 7 × 6 = 168

مثال٦/ بكم طريقة يمكن تكوين عدد رمزه من (3) أرقام واقل من (500) يمكن تكوينه من استخدام الأرقام { 7 , 6 , 5 , 4 , 3 , 2 , 1} اذا كان

(a) يسمح بتكرار الرقم في العدد نفسه ؟　　(b) لا يسمح بتكرار الرقم في العدد نفسه ؟

الحل

(a) التكرار مسموح	(b) التكرار غير مسموح
عدد طرق اختيار رقم المئات = 4	عدد طرق اختيار رقم المئات = 4
عدد طرق اختيار رقم العشرات = 7	عدد طرق اختيار رقم العشرات = 6
عدد طرق اختيار رقم الآحاد = 7	عدد طرق اختيار رقم الاحاد = 5
عدد الطرق الكلي = 7 × 7 × 4	عدد الطرق الكلي = 4 × 5 × 6
= 196 عدداً	= 120 عدداً

ملاحظة / لإيجاد عدد الإعداد نتبع الخطوات التالية

١ـ اذا وجد في السؤال (اكبر او اصغر) نبدأ من اخر مرتبة

٢ـ اذا طلب في السؤال إيجاد الإعداد (الزوجية او الفردية) نبدأ بالمرتبة الآحاد

مثال٧/ كم عدداً مكون رمزه من ثلاثة مراتب يمكن تكوينه باستخدام الأرقام 7 , 6 , 5 , 4 , 3, 2 , 1 بحيث

a) يكون العدد زوجياً وتكرار الرقم في العدد غير مسموح به .

b) يكون العدد فردياً وتكرار الرقم في العدد مسموح به .

الحل /

(a) العدد الزوجي والتكرار غير مسموح به	**(b) العدد الفردي والتكرار مسموح به**
عدد طرق اختيار رقم الاحاد = 3	عدد طرق اختيار رقم الاحاد = 4
عدد طرق اختيار رقم العشرات = 6	عدد طرق اختيار رقم العشرات = 7
عدد طرق اختيار رقم المئات = 5	عدد طرق اختيار رقم المئات = 7
عدد الطرق الكلي = 5 × 6 × 3 = 90 عدداً	عدد الطرق الكلي = 7 × 7 × 4 = 196 عدداً

تمارين(1-1)

ت1/ وزاري ٢٠١١/ لدى احمد (5) سترات مختلفة (6) بنطلونات مختلفة (8) قمصان مختلفة فبكم زي مختلف يظهر به احمد مكون من ستره وبنطلون وقميص ؟

الحل / عدد الزي الذي يظهر به احمد = 8 × 6 × 5 = 240 زي

ت2/ اذا كان لدينا الحروف أ – ل – ع – ق – ك – ب . كم كلمة مكونة من أربعة أحرف (بمعنى او بدون معنى) من هذه الحروف على انه لا يسمح بتكرار الحرف في الكلمة الواحدة ؟

الحل /

عدد طرق اختيار الحرف الأول = **6**

عدد طرق اختيار الحرف الثاني = **5**

عدد طرق اختيار الحرف الثالث = **4**

عدد طرق اختيار الحرف الرابع = **3**

عدد الكلمات = 3 × 4 × 5 × 6 = 360

ت3/ بكم طريقة يمكن اختيار ثلاث أشخاص من بين عشرة أشخاص لشغل ثلاثة وظائف معينة مختلفة ؟

الحل /

عدد طرق اختيار الوظيفة الأولى = 10

عدد طرق اختيار الوظيفة الثانية = 9

عدد طرق اختيار الوظيفة الثالثة = 8

∴ عدد طرق الاختيار = $8 \times 9 \times 10 = 720$ طريقة

==

ت4/ كم عدداً مكون رمزه من ثلاثة أرقام يمكن تكوينه باستخدام الأرقام 9 , 8 , 7 , 6 , 5 , 4 , 3

a) على ان يكون العدد فردياً والتكرار غير مسموح به للرقم في العدد نفسه .

b) على ان يكون العدد زوجياً والتكرار مسموح به للرقم في العدد نفسه .

الحل /

a) عدد طرق الاختيار رقم الآحاد = 4

عدد طرق الاختيار العشرات = 6

عدد طرق الاختيار رقم المئات = 5

∴ عدد الإعداد = $5 \times 6 \times 4 = 120$ عددا

b) عدد طرق الاختيار رقم الآحاد = 3

عدد طرق الاختيار العشرات = 7

عدد طرق الاختيار رقم المئات = 7

∴ عدد الاعداد = $7 \times 7 \times 3 = 147$ عددا

==

ت5/ كم عدداً مكون رمزه من ثلاثة مراتب يمكن تكوينه باستخدام الأرقام 7 , 6 , 5 , 4 , 3, 2 , 1 بحيث

a) على ان يكون العدد اكبر من (500) والتكرار مسموح به للرقم في العدد نفسه.

b) على ان يكون العدد اصغر من (400) والتكرار غير مسموح به للرقم في العدد نفسه .

الحل /

(a) العدد اكبر من (500) والتكرار مسموح به	**(b) العدد اصغر من (400) والتكرار غير مسموح به**
عدد طرق اختيار رقم المئات = 3	عدد طرق اختيار رقم المئات = 3
عدد طرق اختيار رقم العشرات = 7	عدد طرق اختيار رقم العشرات = 6
عدد طرق اختيار رقم الآحاد = 7	عدد طرق اختيار رقم المئات = 5
عدد الطرق الكلي = $7 \times 7 \times 3 = 147$ عدداً	عدد الطرق الكلي = $5 \times 6 \times 3 = 90$ عدداً

س وزاري ٢٠١٢/ كم كلمة يمكن تكوينها من ثلاثة حروف من أحرف كلمة (زيزفون) بمعنى او بدون معنى دون السماح بتكرار الحرف في الكلمة الواحدة ؟

الحل /الحروف هي (ز – ي – ف – و – ن)

عدد طرق اختيار الحرف الأول = **5**

عدد طرق اختيار الحرف الثاني = **4**

عدد طرق اختيار الحرف الثالث= **3**

∴ **عدد الكلمات** = $3 \times 4 \times 5 = 60$ كلمة

==

س وزاري٢٠١٤/ اذا كان لدى فتاة (7) قمصان مختلفة الالون (5) تنورات مختلفة الالوان و (3) أحذية مختلفة فبكم زي مختلف مكون من قميص وتنورة وحذاء يمكن ان تظهر به الفتاة

الحل /

عدد طرق اختيار القميص الواحد = 7

عدد طرق اختيار التنورة الواحدة = 5

عدد طرق اختيار الحذاء الواحد = 3

عدد الازياء التي تظهر بها الفتاة = $3 \times 5 \times 7 = 105$ زي

==

س / كم عددا رمزه مكون من 3 أرقام مختلفة ومن مضاعفات العدد 5 يمكن تكوينه من الارقام التي تنتمي للمجموعة { 1 , 2 , 4 , 5 , 6 , 7}

الحل /

عدد طرق اختيار الاحـــــاد = 1

عدد طرق اختيار العشرات = 5

عدد طرق اختيار المـئـات = 4

عدد الأعداد= $4 \times 5 \times 1 = 20$

==

س/ كم كلمة بمعنى او بدون معنى يمكن تكوينها من كلمة (سنكفيكهم) مكونه من أربعة أحرف على ان لا يسمح بتكرار الحرف في الكلمة الواحدة ؟ وزاري (٢٠١٤ و ٢٠١٥)

س/ كم عددا زوجيا مكون من (4) مراتب يمكن تكوينه من الارقام $\{7.6, 5, 4, 3, 2, 1, 0\}$ بفرض عدم السماح بتكرار الرقم ؟ وزاري (٢٠١٥)

الحل

اولا / اذا كانت الصفر في مرتبة الاحاد فان

الاحاد =1

الالوف =7

المئات = 6

العشرات = 5

عدد الطرق = $5 \times 6 \times 7 \times 1 = 210$

الاستاذ : عبدالسلام محمد

ثانيا / اذا كانت 6 , 4 ,2 في مرتبة الاحاد فان

الاحاد =3

الالوف =6

المئات = 6

العشرات = 5

عدد الطرق = $5 \times 6 \times 6 \times 3 = 540$

فيكون عدد الطرق الكلي = $540 + 210 = 750$

اسئلة وزارية

س1 / صاحب محل ساعات لديه (10) ماركات مختلفة منها وكل ماركة فيها (5) أحجام وكل حجم (7) الوان فكم ساعة في المحل ؟

س٢ / كم كلمة يمكن مؤلفة من أربعة حروف مختلفة يمكن تكوينها من الأحرف : أ، ب ، ج،د،هـ

س٣/ كم عدد رمزه مكون من (3) ارقام يمكن تكوينه باستخدام الأرقام 9 , 8 , 7 , 6 , 5 , 4 , 3, 2 على ان يكون العدد فردياً وتكرار غير مسموح فيه للرقم .

س ٤/ لدى احمد (6) قمصان مختلفة الألوان (7) بنطلونات مختلفة (4) احذية مختلفة فبكم زي مختلف يظهر به احمد مكون من ستره وبنطلون وقميص ؟

س٥/ كم عدداً مكون رمزه من ثلاثة أرقام **يكون فردياً** يمكن تكوينه باستخدام الأرقام **{7, 6 , 5 , 4, 3 , 2 , 1}**

اذا كان **التكرار الرقم في العدد نفسه مسموحا به .**

س٦/ كم عددا فرديا مكونا من (3) ارقام يمكن تكوينه باستخدام الأرقام 9 , 8 , 7 , 6 , 5 , 4 , 3, والتكرار غير مسموح به للرقم في العدد نفسه . (٢٠١٢ تمهيدي)

مضروب العدد :-

اذا كان n عدد طبيعي فإن مضروب العدد (n)

عندما $n \geq 2$

$$n = n! = n(n-1)(n-2)(n-3)........1$$

$1! = 1$ من التعريف

$0! = 1$ علماً ان

مثال١/ جد $6!$

الحل /

$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$

مثال٢/ جد $10!$

الحل /

$10! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 3628800$

مثال٣ / اكتب بأبسط صورة $\frac{8!}{6!}$

الحل /

$$\frac{8!}{6!} = \frac{8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{6\times5\times4\times3\times2\times1} = 8 \times 7 = 56$$

$$(n+1)! = (n+1)n(n-1)(n-2) \dots \dots \dots .1$$

$$(n+2)! = (n+2)(n+1)n(n-1)(n-2) \dots \dots \dots .1$$

$$(n-1)! = (n-1)(n-2)(n-3) \dots \dots \dots .1$$

$$(n-2)! = (n-2)(n-3)(n-4) \dots \dots \dots .1$$

==============

مثال٤ /اذا كان $6 = \frac{n!}{(n-2)!}$ فما قيمة n ؟ وزاري ٢٠١١ الدور الاول

الحل /

$$\frac{n!}{(n-2)!} = 6$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = 6$$

$$n(n-1) = 6$$

$$n^2 - n - 6 = 0$$

$$(n-3)(n+2) = 0$$

$n = 3$ ⟵ الجواب

$n = -2$ يهمل لأنه سالب

مثال٥/ اذا كان $n! = 720$ فما قيمة n؟

$$720 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6$$
$$= 6!$$
$$n! = 6! \longrightarrow n = 6$$

مثال٦/ اذا كانت $3(n!) = 360$ فما قيمة n ؟

$$3(n!) = 360$$

$$n! = 120 \Longrightarrow 120 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$n! = 5! \Longrightarrow n = 5$$

مثال٧/ جد قيمة n اذا كان $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 30$ وزاري ٢٠١٣ دور الثاني

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 30$$

$$\frac{(n+1)n(n-1)!}{(n-1)!} = 30$$

$$(n+1)n = 30$$

$$n^2 + n - 30 = 0$$

$$(n - 5)(n + 6) = 0$$

$n - 5 = 0 \longrightarrow n = 5$

$n + 6 = 0 \longrightarrow n = -6$ يهمل لأنه سالب

مثال٨/ جد قيمة n اذا كان $\frac{n!}{(n-2)!} = 30$ وزاري ٢٠١٢ تمهيدي

$$\frac{n!}{(n-2)!} = 30$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = 30$$

$$n(n-1) = 30$$

$$n^2 - n - 30 = 0$$

$$(n - 6)(n + 5) = 0$$

$n - 6 = 0 \longrightarrow n = 6$

$n + 5 = 0 \longrightarrow n = -5$ يهمل لأنه سالب

مثال٩/ جد قيمة n اذا كان $n! = 5040$

الحل /

1	5040
2	5040
3	2520
4	840
5	210
6	42
7	7
	1

$n! = 5040$

$n! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$n! = 7!$

$n = 7$

مثال٨/جد قيمة n اذا كان $\frac{n!}{(n-2)!} = 72$ **وزاري ٢٠٠٠ تمهيدي**

$\frac{n!}{(n-2)!} = 72$

$\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = 72$

$n(n-1) = 72$

$n^2 - n - 72 = 0$

$(n-9)(n+8) = 0$

$n - 9 = 0 \longrightarrow n = 9$

$n + 8 = 0 \longrightarrow n = -8$ يهمل لأنه سالب

==============

مثال٤/ اذا كان $n! = 6(n-2)!$ فما قيمة n ؟ وزاري ٢٠١٤ الدور الاول

الحل /

$n! = 6(n-2)!$

$n(n-1)(n-2)! = 6(n-2)!$

$n(n-1) = 6$

$n^2 - n - 6 = 0$

$(n-3)(n+2) = 0$

$n = 3 \longleftarrow$ الجواب

$n = -2$ يهمل لأنه سالب

التباديل

تعريف :

ليكن كل من n ,r عدداً طبيعياً $r \le n$ فان P_r^n تقرأ تباديل n مأخوذة منه r في كل مرة ويكون :

$$P_r^n = \begin{cases} n! & \text{اذا كان } n = r \\ n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1) & \text{عندما } r < n \\ 1 & \text{عندما } r = 0 \end{cases}$$

يمكن حساب التباديل من القانون $P_r^n = \dfrac{n!}{(n-r)!}$

مثال ١/ احسب P_3^6

الحل / $P_3^6 = 6 \times 5 \times 4 = 120$

مثال ٢/ احسب P_0^{10}

الحل / $P_0^{10} = 1$

مثال ٣/ احسب P_4^4

الحل / $P_4^4 = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

مثال ٤/ احسب P_5^8

الحل / $P_5^8 = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 6720$

مثال ٥/ احسب P_7^{15}

الحل/ $P_7^{15} = 15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 = 32432400$

مثال ٦/ جد قيمة n اذا كان $P_2^n = 12$

الحل /

$P_2^n = 12$

$n(n-1) = 12$

$n^2 - n - 12 = 0$

$(n-4)(n+3) = 0$

$n = 4$

$n = -3$ يهمل لأنه سالب

==

س/ وزاري ٢٠١٦ الدور الاول / $p(n,3) = 65(n-2)$

$n(n-1)(n-2) = 56(n-2)$

$n(n-1) = 56$

$n^2 - n - 56 = 0$

$(n-8)(n+7) = 0$

$\mathbf{n - 8 = 0} \Longrightarrow \mathbf{n = 8}$

$\mathbf{n + 7 = 0} \Longrightarrow \mathbf{n = -7}$ يهمل

س١٤/ جد قيمة r اذا كان $P_r^6 = 120$

$\frac{6!}{(6-r)!} = 120$

$\frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{(6-r)!} = 5\times4\times3\times2\times1$

$\frac{6}{(6-r)!} = 1$

$(6-r)! = 6$

$(6-r)! = 3\times2\times1$

$(6-r)! = 3!$

$6 - r = 3 \qquad r = 6 - 3 = 3$

==

س ١٥/ جد قيمة n اذا علمت أن $35p(n-1,3) = 5p(n,4)$ وزاري ٢٠١١ تمهيدي

تمارين (2 – 1)

س١/ احسب قيمة كل مما يأتي

a) $\frac{7!}{5!}$ b) $\frac{\lfloor 9}{\lfloor 5} - \frac{\lfloor 10}{\lfloor 6}$

a) $\frac{7!}{5!} = \frac{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{5\times4\times3\times2\times1} = 7\times6 = 42$

$\frac{\lfloor 9}{\lfloor 5} - \frac{\lfloor 10}{\lfloor 6} = \frac{9\times8\times7\times6\times5!}{5!} - \frac{10\times9\times8\times7\times6!}{6!}$

$= 9\times8\times7\times6 - 10\times9\times8\times7$

$= 3024 - 5040 = -2016$

س٢ / جد قيمة n اذا كان $P_2^n = 72$ وزاري ٢٠١٣ الدور الثالث

$P_2^n = 72$

$n(n-1) = 72$

$n^2 - n - 72 = 0$

$(n-9)(n+8) = 0$

$n = 9$

$n = -8$ يهمل لأنه سالب

س٣/ جد قيمة n اذا كان $P_5^n = 8 \times p_4^n$ وزاري ٢٠١٣ دور الاول

الحل /

$n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) = 8n(n-1)(n-2)(n-3)$

$n - 4 = 8 \quad \rightarrow \quad n = 8 + 4 = 12$

س٤ /جد قيمة (n) اذا علمت ان $P_2^3 = \frac{n!}{(n-2)!}$

$\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = 3\times2\times1$

$n(n-1) = 6$

$n^2 - n - 6 = 0$

$(n-3)(n+2) = 0$

$n - 3 = 0 \qquad n = 3$

$n + 2 = 0 \qquad n = -2$ يهمل

س٥ / جد قيمة : $\frac{1}{56}\left[P_2^8 + P_3^8\right]$ **وزاري**

$$\frac{1}{56}\left[P_2^8 + P_3^8\right] = \frac{1}{56}[8 \times 7 + 8 \times 7 \times 6]$$

$$= \frac{1}{56}[56 + 56 \times 6] = 1 + 6 = 7$$

س6 / جد قيمة : $\frac{1}{210}\left[P_3^7 + P_4^7\right]$

$$\frac{1}{210}\left[P_3^7 + P_4^7\right] = \frac{1}{210}[7 \times 6 \times 5 + 7 \times 6 \times 5 \times 4]$$

$$= \frac{1}{210}[210 + 210 \times 4] = 1 + 4 = 5$$

س٧ / جد قيمة n اذا كان $P_2^n = 42$ وزاري ٢٠١١ الدور الثاني

الحل /

$P_2^n = 42$

$n(n-1) = 42$

$n^2 - n - 42 = 0$

$(n-7)(n+6) = 0$

$n = 7$

$n = -6$ يهمل لأنه سالب

س٨ / جد قيمة n اذا علمت أن $2P_2^n = 4!$ **وزاري ٢٠١٤ الدور الثالث**

الحل /

$2P_2^n = 4!$

$2n(n-1) = 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$n^2 - n = 12$

$n^2 + n - 12 = 0$

$(n-4)(n+3) = 0$

$n - 4 = 0 \Longrightarrow n = 4$

$n + 3 = 0 \Longrightarrow n = -3$ يهمل

س٩ / جد قيمة n اذا علمت أن $2p(n, 2) = 4!$ **وزاري ٢٠١٠ الدور الاول**

س١٠/ وزاري/ جد قيمة n اذا كان $P_2^{n+1} = 42$

الحل /

$P_2^{n+1} = 42$

$(n+1)n = 42$

$n^2 + n - 42 = 0$

$(n+7)(n-6) = 0$

n = -7 يهمل لأنه سالب

$n = 6$

س١١/ وزاري / اذا كان $\frac{P_2^n}{3!} = 5$ جد قيمة n

==

س١٢/ وزاري / اذا كان $\frac{P_3^n}{n} = 42$ جد قيمة n

الحل /

$\frac{P_3^n}{n} = 42$

$\frac{n(n-1)(n-2)}{n} = 42$

$(n-1)(n-2) = 42$

$n^2 - 3n + 2 - 42 = 0$

$n^2 - 3n - 40 = 0$

$(n+5)(n-8) = 0$

n = -5 يهمل لأنه سالب

$n = 8$

==

س١٣/ وزاري / جد قيمة n اذا كان $P_2^n = 132$

$P_2^n = 132$

$n(n-1) = 132$

$n^2 - n - 132 = 0$

$(n-12)(n+11) = 0$

$n = 12$

$n = -11$ يهمل

ملاحظات

الأستاذ عبدالسلام محمد علي

١- أسئلة الإعداد التي فيها التكرار مسموح به تحل بمبدأ العد فقط .
٢- أسئلة الإعداد التي فيها التكرار غير مسموح به تحل أما بمبدأ العد أو بالتباديل
٣- أسئلة الأعداد (الفردية او الزوجية او اكبر او اصغر) سواء كان التكرار مسموح به او غير مسموح تحل بمبدأ العد فقط .
٤- الأسئلة التي فيها الترتيب ضروري تحل بالتباديل . بينما الأسئلة التي فيها الترتيب غير ضروري تحل بالتوافيق .

مثال/ ما عدد طرق توزيع (5) أشخاص على (5) وظائف مختلفة بحيث لكل واحد منهم وظيفة واحدة

$P_5^5 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

==

مثال / ما عدد الإعداد التي رمز كل منها مكون من ثلاثة أرقام مأخوذ من بين الأرقام
8 , 7 , 6 , 5 , 4 , 3

a - دون تكرار الرقم في العدد ؟
b - يمكن تكرار الرقم في العدد ؟

الحل /

a - دون تكرار الرقم في العدد يكون

عدد الإعداد = P_3^6

$P_3^6 = 6 \times 5 \times 4 = 120$

b - يمكن تكرار الرقم في العدد يحل فقط بمبدأ العد

عدد طرق اختيار رقم الآحـــاد = 6
عدد طرق اختيار رقم العشرات = 6
عدد طرق اختيار رقم المـئـات = 6
عدد الإعداد = $6 \times 6 \times 6$
$= 216$

==

مثال /كم كلمة يمكن تكوينها مكونة من أربعة حروف مختلفة مأخوذة من الأحرف أ ، ب ، جـ ، د ، هـ ؟

الحل /

عدد الكلمات يكون P_4^5

$P_4^5 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$

س٣ / اذا كان لدينا المجموعة $x = \{1 , 2 ,3 , 4 , 5 , 6 , 7\}$ فكم عددا يمكن تكوينه اذا كان :

a) رمزه مكون من ثلاثة أرقام بدون تكرار الرقم في العدد نفسه ؟

الحل / $P_3^7 = 7 \times 6 \times 5 = 210$

b) رمزه مكون من ثلاثة أرقام يسمح بتكرار الرقم في العدد نفسه ؟

الحل/ عدد طرق اختيار رقم الآحـــاد = 7

عدد طرق اختيار رقم العشرات = 7

عدد طرق اختيار رقم المـئـات = 7

عدد الإعداد =7 × 7 × 7 = 343 عدداً

c) رمزه مكون من ثلاثة أرقام اصغر من 400 بدون تكرار الرقم في العدد نفسه ؟

الحل/ عدد طرق اختيار رقم المئـــات = 3

عدد طرق اختيار رقم العشرات = 6

عدد طرق اختيار رقم الآحـــاد = 5

عدد الإعداد =3 × 6 × 5 = 90 عدداً

d) رمزه مكون من ثلاثة أرقام اكبر من 200 ويسمح بتكرار الرقم في العدد نفسه ؟

الحل/ عدد طرق اختيار رقم المـئــات = 6

عدد طرق اختيار رقم العشرات = 7

عدد طرق اختيار رقم الاحـــاد = 7

عدد الإعداد = 6 × 7 × 7 = 294 عدداً

e) رمزه مكون من ثلاثة أرقام ويكون زوجياً بدون تكرار الرقم في العدد نفسه ؟

الحل/ عدد طرق اختيار رقم الآحـــاد = 3

عدد طرق اختيار رقم العشرات = 6

عدد طرق اختيار رقم المـئـات = 5

عدد الإعداد =3 × 6 × 5 = 90 عدداً

f) رمزه مكون من ثلاثة أرقام ويكون فردياً ويسمح بتكرار الرقم في العدد نفسه ؟

الحل/ عدد طرق اختيار رقم الآحـــاد = 4

عدد طرق اختيار رقم العشرات = 7

عدد طرق اختيار رقم المـئـات = 7

عدد الإعداد = 4 × 7 × 7 = 196 عدداً

س٤/ يجري في احد الصفوف انتخابا على ثلاثة مراكز في احدى لجان الصف هي الرئيس ونائب الرئيس وأمين السر ما عدد النتائج التي تسفر عنها الانتخابات اذا علم ان عدد الطلاب المشاركين في الانتخابات عشرة طلاب ؟

الحل/ عدد النتائج $= P_3^{10}$

$$\boldsymbol{P_3^{10} = 10 \times 9 \times 8 = 720}$$ كلمة

==

س٥ /كم كلمة مختلفة الحروف مكونة من ثلاث حروف من بين حروف ذي قار ؟

الحل / عدد الحروف 5

عدد الكلمات يكون P_3^5

$$\boldsymbol{P_3^5 = 5 \times 4 \times 3 = 60}$$

==

س٦/ بكم طريقة يمكن أن يجلس خمسة طلاب في صف من ثمانية كراسي ؟

الحل /

$$\boldsymbol{P_5^8 = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 6720}$$

==

س/وزاري / ست أشخاص يقفون على خط مستقيم ، بكم ترتيب مختلف ممكن لطريقة وقوفهم .

الحل /

$$P_6^6 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

==

س/ وزاري / بكم طريقة يمكن ان يجلس (10) طلاب على (4) كراسي فقط ؟

الحل /

$$P_4^{10} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$$

التوافيق

الأستاذ عبدالسلام محمد علي

هو تنظيم لبعض او لكل عناصر مجموعة دون الاهتمام للترتيب الذي تنتظم به هذه لعناصر .

ويرمز له بالرمز C_r^n أو $\binom{n}{r}$ أو $C(n,r)$ ويقرأ توافيق n مأخوذ r في كل مرة .

ولإيجاد التوفيق نستخدم القانون التالي

اذا كانت n , r أعداد صحيحة غير سالبة فأن $$C_r^n = \frac{P_r^n}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

ملاحظة /

$$C_n^n = 1$$

$$C_0^n = 1$$

مثال / احسب C_5^{13} , C_0^{10} , C_{20}^{20}

$$C_5^{13} = \frac{P_5^{13}}{5!} = \frac{13\times12\times11\times10\times9}{5\times4\times3\times2\times1} = 13 \times 11 \times 9 = 1287$$

$$C_0^{10} = \frac{P_0^{10}}{0!} = \frac{1}{1} = 1$$

$$C_{20}^{20} = \frac{P_{20}^{20}}{20!} = \frac{20!}{20!} = 1$$

س١ / جد قيمة $a) C_5^{11}$ $b) C(18,18)$ $c) C_0^7$,

الحل /

$$a)\ C_5^{11} = \frac{P_5^{11}}{5!} = \frac{11\times10\times9\times8\times7}{5\times4\times3\times2\times1} = 11 \times 3 \times 4 \times 7 = 924$$

$$b)\ C(18,18) = 1$$

$$c)\ C_0^7 = \binom{7}{0} = 1$$

مثال / احسب , C_{12}^{15} , C_3^{15} ثم لاحظ الناتجين

$$C_3^{15} = \frac{P_3^{15}}{3!} = \frac{15\times14\times13}{3\times2\times1} = 5\times7\times13 = 455$$

$$C_{12}^{15} = \frac{P_5^{13}}{12!} = \frac{15\times14\times13\times12\times11\times10\times9\times8\times7\times6\times5\times4}{12\times11\times10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1} = \frac{15\times14\times13}{3\times2\times1} = 455$$

نلاحظ ان : $C_3^{15} = C_{12}^{15}$

يمكن الاستنتاج بصورة عامة ان

$$C_r^n = C_{n-r}^n$$

مثال / جد قيمة اذا كان $\binom{n+1}{3} = 2\binom{n}{2}$ وزاري ٢٠١٢ الدور الاول

الحل/

$$2\times\frac{P_2^n}{2!} = \frac{P_3^{n+1}}{3!}$$

$$2\times\frac{n(n-1)}{2\times1} = \frac{(n+1)n(n-1)}{3\times2\times1}$$

$$1 = \frac{n+1}{6} \longrightarrow n+1=6 \longrightarrow n=5$$

س٢ / جد قيمة n اذا كان $C_{20}^n = C_{35}^n$ وزاري ٢٠١٢ الدور الثالث

$$C_{20}^n = C_{35}^n$$

$$C_{n-20}^n = C_{35}^n$$

$$n - 20 = 35 \longrightarrow n = 35 + 20 = 55$$

س٨/ جد قيمة n اذا علمت ان $\binom{n+1}{4} = 12\binom{n}{3}$ وزاري ٢٠١٥ تمهيدي

$$\frac{12p_3^n}{3!} = \frac{p_4^{n+1}}{4!}$$

$$\frac{12n(n-1)(n-2)}{6} = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{24}$$

$$2 = \frac{n+1}{24}$$

$$n+1 = 48 \qquad n = 48-1 = 47$$

س٨/ جد قيمة n اذا علمت ان $\binom{n+1}{4} = 6\binom{n}{3}$ وزاري ٢٠١٢ الدور الثاني

مثال / جد قيمة اذا كان $3\binom{n}{4} = 14\binom{n}{2}$

الحل/

$$3 \times \frac{P_4^n}{4!} = 14 \times \frac{P_2^n}{2!}$$

$$3 \times \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4\times3\times2\times1} = 14 \times \frac{n(n-1)}{2\times1}$$

$$\frac{(n-2)(n-3)}{8} = 7$$

$$(n-2)(n-3) = 7 \times 8$$

$$n^2 - 3n - 2n + 6 = 56$$

$$n^2 - 5n - 50 = 0$$

$$(n-10)(n+5)$$

$n - 10 = 0 \Rightarrow n = 10$

$n + 5 = 0 \Rightarrow n = -5$ يهمل

س٨/ جد قيمة **n** اذا علمت ان $\binom{n}{3} = \binom{n}{2}$

$$\frac{P_3^n}{3!} = \frac{P_2^n}{2!}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{3\times2\times1} = \frac{n(n-1)}{2\times1}$$

$$\frac{n-2}{6} = \frac{1}{2}$$

$$n - 2 = \frac{6}{2}$$

$n - 2 = 3 \qquad n = 3 + 2 = 5$

س٩/وزاري ٢٠١٦ تمهيدي / اذا كان $2C_2^{n+1} = C_3^{n+2}$ فجد قيمة n

س١٠ / جد قيمة **n** اذا كان $C_2^n = 45$ وزاري ٢٠٠٥ الدور الاول

س١١ /جد قيمة **n** اذا كان $C_2^n = 66$ وزاري ٢٠٠٨ الدور الثاني

س١٢/اذا كان $C_r^n = 36$, $p_r^n = 72$ فما قيمة كل من n , r وزاري ٢٠٠٨ الدور الاول

س١٣ /جد قيمة **n** اذا كان $C_2^{n+1} = 21$ وزاري ٢٠٠٩ الدور الاول

مثال/اذا كان عدد الأسئلة في الورقة ألامتحانيه (8) أسئلة والمطلوب الإجابة على (6) منها فبكم طريقة يمكن الإجابة ؟

الحل / الترتيب غير ضروري في الإجابة على الأسئلة الامتحانية لذا فأن :

عدد الطرق C_6^8

$$C_6^8 = \frac{P_6^8}{6!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{8 \times 7}{2} = 4 \times 7 = 28$$ طريقة

مثال / كم قطعة مستقيم يمكن تحديدها بنقطتين من مجموعة فيها (6) نقاط ولا توجد ثلاث منها على استقامة واحدة ؟

الحل / عدد القطع المستقيمة يكون :

$$C_2^6 = \frac{P_2^6}{2!} = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 3 \times 5 = 15$$

مثال / بكم طريقة يمكن اختيار لجنة مكونة من (5) طالبات ، (7) طلاب من بين مجموعة مكونة من (8) طالبات ، (10) طلاب ؟

الحل /

عدد طرق اختيار الطالبات = C_5^8

$$C_5^8 = \frac{P_5^8}{5!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 8 \times 7 = 56$$ طريقة

عدد طرق اختيار الطلاب = C_7^{10}

$$C_7^{10} = \frac{P_7^{10}}{7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 10 \times 3 \times 4 = 120$$ طريقة

باستخدام مبدأ

عدد طرق تكوين اللجنة = 56 × 120 = 6720

مثال/ صندوق يحتوي على (6) كرات حمراء ، (4) كرات بيضاء يراد سحب (5) كرات بشرط ان تكون (3) كرات حمراء فقط بكم طريقة يمكن أجراء السحب ؟

الحل /

عدد طرق سحب (3) كرات حمراء = C_3^6

$$C_3^6 = \frac{P_3^6}{3!} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 5 \times 4 = 20$$

عدد طرق سحب كراتين بيضاء = C_2^4

$$C_2^4 = \frac{P_2^4}{2!} = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 2 \times 3 = 6$$ طريقة

عدد الطرق الممكنة = 6 × 20 = 120

س٤/ a/جد عدد طرق اختيار لجنة ثلاثية من بين (10) أشخاص

الحل /

$$C_3^{10} = \frac{P_3^{10}}{3!} = \frac{10\times9\times8}{3\times2\times1} = 5\times3\times8 = 120$$

س٤/c/ ما عدد القطع المستقيمة التي يمكن ان تصل بين اي رأسين من رؤوس مضلع سداسي .

الحل /

$$C_2^6 = \frac{P_2^6}{2!} = \frac{6\times5}{2\times1} = 3\times5 = 15$$

س٤/b/ جد عدد المجموعات الجزئية الثنائية التي يمكن تكوينها من مجموعة عدد عناصرها (6)

الحل /

$$C_2^6 = \frac{P_2^6}{2!} = \frac{6\times5}{2\times1} = 3\times5 = 15$$

س٥/ يراد تشكيل لجنة من ستة أعضاء من بين (5) طلاب ، (8) مدرسين فبكم طريقة يمكن أن تكون اللجنة محتوية على مدرسين اثنين فقط ؟

الحل /

عدد طرق اختيار مدرسين أثنين من 8 مدرسين $= C_2^8$

$$C_2^8 = \frac{P_5^8}{2!} = \frac{8\times7}{2\times1} = 4\times7 = 28$$ طريقة

عدد طرق اختيار(4) طلاب من (5) طلاب $= C_4^5$

$$C_4^5 = \frac{P_4^5}{4!} = \frac{5\times4\times3\times2}{4\times3\times2\times1} = 5$$ طريقة

باستخدام مبدأ

عدد طرق تكوين اللجنة = 5 × 28 = 140 طريقة

س٦/صندوق يحتوي على (4) كرات حمراء ، (8) كرات بيضاء سحبت ثلاث كرات معاً جد عدد طرق سحب :

١- أثنتان حمراء و واحدة بيضاء . ٢- على الأقل اثنتان حمراء

الحل /

١- عدد طرق سحب (2) كرات حمراء من أصل 4 هو $= C_2^4$

$$C_2^4 = \frac{P_2^4}{2!} = \frac{4\times3}{2\times1} = 2\times3 = 6$$

عدد طرق سحب كرة واحدة بيضاء من أصل 8 هو $= C_1^8$

$$C_1^8 = 8$$ طريقة

عدد الطرق الممكنة = 6 × 8 = 48

٢- على الأقل اثنتان حمراء تعني

(اثنين حمراوين و واحدة بيضاء) او (3 حمر فقط) فيكون

عدد طرق هو $= C_0^8 \times C_3^4 + C_1^8 \times C_2^4$

$$C_0^8 \times C_3^4 + C_1^8 \times C_2^4 = 1\times\frac{4\times3\times2}{3\times2\times1} + 48 = 1\times4+48 = 52$$

س٧/اذا كان عدد الأسئلة امتحان مادة ما هو (10) أسئلة وكان المطلوب حل (7) أسئلة منها على ان نختار (4) من الخمسة الأولى ، فبكم طريقة يمكن الإجابة ؟

الحل/

عدد طرق هو $= C_3^5 \times C_4^5$

$$C_3^5 \times C_4^5 = \frac{P_3^5}{3!} \times \frac{P_4^5}{4!} = \frac{5\times4\times3}{3\times2\times1} \times \frac{5\times4\times3\times2}{4\times3\times2\times1} = 5 \times 2 \times 5 = 50$$

اسئلة وزارية

س١/ بكم طريقة يمكن اختيار لجنة مكونة من(3) موظفين وموظفتين من بين (8) موظفين وخمسة موظفات .

س٢ /كيس فيه (10) كرات حمراء ، (6) كرات بيضاء يراد سحب (4) كرات معا دون إرجاع ، ما عدد الطرق التي تكون فيها الكرات المسحوبة من نفس اللون ؟

س٣/ يراد تشكيل لجنة من ستة أعضاء من بين (5) طلاب ، (8) مدرسين فبكم طريقة يمكن أن تكون اللجنة محتوية على مدرسين اثنين فقط ؟

س٤/ صندوق يحتوي على (6) كرات حمراء ، (4) كرات بيضاء يراد سحب (5) كرات منه بشرط ان تكون (3) كرات منها حمراء فقط بكم طريقة يمكن أجراء السحب ؟

س٥/صندوق يحتوي على (4) كرات حمراء ، (8) كرات بيضاء سحبت ثلاث كرات معاً جد عدد طرق سحب : ١- أثنتان حمراء و واحدة بيضاء . ٢- على الأقل اثنتان حمراء

س٦/ صندوق يحتوي على (6) كرات حمراء ، (4) كرات بيضاء يراد سحب (5) كرات على ن تكون ضمن السحبة كرتين حمراء وكرة واحدة خضراء ، فبكم طريقة لذلك ؟

مبرهنة ذات الحدين : هي قانون لإيجاد ناتج قوى مجموع حدين أي مقدار مكون من مجموع حدين مثل $(x + y)$ مرفوع الى أي أس صحيح موجب .

لإيجاد مجموع حدين مرفوع الى أي أس صحيح نستخدم القانون التالي

$$(x+y)^n = C_0^n x^n + C_1^n x^{n-1} y + C_2^n x^{n-2} y^2 + \cdots\cdots + C_n^n y^n$$

ملاحظة :

١- اذا كانت الإشارة بين الحدين + فان أشارات الناتج تكون جميعها موجبة

٢- اذا كانت الإشارة بين الحدين – فان أشارات الحدود الفردية الترتيب تكون موجبة والحدود الزوجية الترتيب تكون سالبة أي (+ ، - ، + ، -، ....)

مثال/ جد مفكوك $(x - y)^5$

الحل /

$$(x-y)^5 = C_0^5 x^5 - C_1^5 x^4 y + C_2^5 x^3 y^2 - C_3^5 x^2 y^3 + C_4^5 x y^4 - C_5^5 y^5$$

$$= x^5 - 5x^4 y + 10x^3 y^2 - 10x^2 y^3 + 5xy^4 - y^5$$

مثال٢/ جد مفكوك $(3a + b)^4$

الحل/

$$(3a+b)^4 = C_0^4 (3a)^4 + C_1^4 (3a)^3 b + C_2^4 (3a)^2 b^2 + C_3^4 (3a) b^3 + C_4^4 b^4$$

$$= 81a^4 + 4(27a^3 b) + 6(9a^2 b^2) + 12ab^3 + b^4$$

$$= 81a^4 + 108a^3 b + 54a^2 b^2 + 12ab^3 + b^4$$

س١/a/ جد مفكوك $(3a - b)^4$

الحل /

$$(3a-b)^4 = C_0^4 (3a)^4 - C_1^4 (3a)^3 b + C_2^4 (3a)^2 b^2 - C_3^4 (3a) b^3 + C_4^4 b^4$$

$$= 81a^4 - 108a^3 b + 54a^2 b^2 - 108ab^3 + b^4$$

س١/b/ جد مفكوك $(3x^2 + 2y)^3$

الحل /

$$(3x^2+2y)^3 = C_0^3 (3x^2)^3 + C_1^3 (3x^2)^2 (2y) + C_2^3 (3x^2)(2y)^2 + C_3^3 (2y)^3$$

$$= 27x^6 + 54x^4 y + 36x^2 y^2 + 8y^3$$

ملاحظات

من قانون مفكوك ذي الحدين نلاحظ

١- عدد حدود المفكوك = $n + 1$

٢- مجموع أسس x , y في كل حد من حدود المفكوك = n

٣- معامل كل حد رتبته r في مفكوك $(x + y)^n$ هو C_{r-1}^{n} فمثلا معامل

٤- في مفكوك $(x + y)^n$ يكون أس الحد الأخير $(y) = n$ واس الحد الأول $(x) = n$

٥- اس الحد الاول للمتغير x يبدأ بالتناقص من n الى صفر اس الحد الثاني للمتغير y يبدأ بالتزايد من صفر الى n

٦- اذا كان n عددا زوجيا فان عدد حدود المفكوك هو $(n + 1)$ فرديا ويكون هناك حدا اوسط رتبته $\frac{n}{2} + 1$

٧- اذا كان n عددا فرديا فان عدد حدود المفكوك هو $(n + 1)$ زوجيا ويكون هناك حدان أوسطان رتبتهما $\frac{n+1}{2}, \frac{n+1}{2} + 1$

٨- في مفكوك $(x + y)^n$ يكون قانون الحد العام $\mathbf{P_r = C_{r-1}^{n}\, x^{n-r+1}\, y^{r-1}}$

قانون الحد العام

ان قانون الحد العام أي

$$P_r = C^n_{r-1}\ x^{n-r+1}\ y^{r-1}$$

نستخدم القانون الحد العام
١- لإيجاد قيمة الحد اذا علمت رتبته
٢- إيجاد رتبة الحد اذا علمت قيمته
٣- إيجاد الحد الخالي من x او الحد الذي يحوي x او x^2 وهكذا

==

مثال٣ / اوجد الحد الخامس في المفكوك $(x - 3y)^8$

$$P_r = C^n_{r-1}\ x^{n-r+1}\ y^{r-1}$$
$$P_5 = C^8_4\ x^4\,(-3y)^4$$
$$= \frac{P^8_4}{4!}x^4(81y^4) = \frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1}x^4(81y^4) = 70\times81x^4y^4 = 5670x^4y^4$$

==

مثال٤/ جد الحد الوسط في المفكوك $(\frac{x}{2} - 3)^8$

الحل / الأس عدد زوجي فيوجد حد أوسط واحد رتبته = $\frac{n}{2} + 1$

$$\frac{n}{2} + 1 = \frac{8}{2} + 1 = 5$$

$$P_r = C^n_{r-1}\ x^{n-r+1}\ y^{r-1}$$
$$P_5 = C^8_4\ (\frac{x}{2})^4\,(3)^4 = \frac{p^8_4}{4!}\times\frac{x^4}{16}\times81 = \frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1}\times\frac{x^4}{16}\times81$$
$$= 2\times7\times5\times\frac{x^4}{16}\times81 = \frac{2835}{8}x^4$$

مثال5/ جد الحدين الوسطين في المفكوك $(\frac{3a}{2}-\frac{2}{3a})^7$

الحل / الأس عدد فردي فيوجد حدان أوسطان رتبتاهما $= \frac{n+1}{2} \;,\; \frac{n+1}{2}+1$

$$\frac{n+1}{2}+1=\frac{7+1}{2}+1=5 \;,\; \frac{n+1}{2}=\frac{7+1}{2}=4$$

$$P_r = C^n_{r-1}\, x^{n-r+1}\, y^{r-1}$$

$$P_4 = C^7_3\,(\frac{3a}{2})^4(\frac{-2}{3a})^3 = \frac{p^7_3}{3!}\times\frac{81a^4}{16}\times\frac{-8}{27a^3} = \frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}\times\frac{-3a}{2} = \frac{-105}{2}a$$

$$P_5 = C^7_4\,(\frac{3a}{2})^3(\frac{-2}{3a})^4 = \frac{p^7_4}{4!}\times\frac{27a^3}{8}\times\frac{16}{81a^4} = \frac{7\times6\times5\times4}{4\times3\times2\times1}\times\frac{2}{3a} = \frac{70}{3a}$$

مثال6/ بسط المقدار $(2+a)^4+(2-a)^4$ الى ابسط صورة ثم جد قيمة المقدار عندما $a=\sqrt{3}$

الحل /

$$(2+a)^4 = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5$$
$$(2-a)^4 = p_1 - p_2 + p_3 - p_4 + p_5$$

بالجمع

$$(2+a)^4+(2-a)^4 = 2p_1 + 2p_3 + 2p_5$$
$$= 2(p_1+p_3+p_5)$$
$$= 2(2^4 + C^4_2 2^2 a^2 + a^4) = 2(16+24a^2+a^4)$$

نعوض عن $a=\sqrt{3}$

$$= 2\left(16+24(\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^4\right) = 2(16+24\times3+9)$$
$$= 2(16+72+9) = 2\times97 = 194$$

مثال7/ بسط المقدار $(a+\frac{1}{a})^5-(a-\frac{1}{a})^5$

الحل /

$$(a+\frac{1}{a})^5 = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6$$
$$(a-\frac{1}{a})^5 = p_1 - p_2 + p_3 - p_4 + p_5 - p_6$$

بالطرح

$$= 2p_2 + 2p_4 + 2p_6$$
$$= 2(p_2+p_4+p_6)$$
$$= 2(C^5_1 a^4(\frac{1}{a}) + C^5_3 a^2(\frac{1}{a})^3 + C^5_5(\frac{1}{a})^5) = 2\left(5a^3+\frac{10}{a}+\frac{1}{a^5}\right)$$

مثال8/ جد الحد الذي يحوي على a^8 في المفكوك $(3+a^2)^8$ ثم جد معامله .

الحل/ نفرض ان رتبة الحد الذي يحوي على a^8 في المفكوك $(3+a^2)^8$ هو r

$$P_r = C^8_{r-1}\,(3)^{8-r+1}\,(a^2)^{r-1}$$
$$= C^8_{r-1}\,a^{2r-2}$$

$$a^{2r-2} = a^8$$

$$2r - 2 = 8 \Longrightarrow 2r = 8 + 2 \Longrightarrow 2r = 10 \Longrightarrow r = 5$$

$$P_5 = C^8_4\,(3)^4\,(a^2)^4 = \frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2}(81)a^8 = 4\times7\times5\times81a^8 = 5670$$

∴ المعامل = 5670

مثال٩/ وزاري/ هل يوجد حد خالي من في مفكوك $(x^2-\frac{1}{x})^{15}$ ؟ بين ذلك

الحل/ الحد الخالي من x يعني انه يحتوي على x^0

نفرض ان رتبة الحد الخالي من x في المفكوك هو r

$$P_r = C^{15}_{r-1}\,(x^2)^{15-r+1}\,(\frac{1}{x})^{r-1}$$
$$= C^{15}_{r-1}\,(x^2)^{16-r}(x^{-1})^{r-1}$$
$$= C^{15}_{r-1}\,x^{32-2r}\,x^{-r+1}$$
$$= C^{15}_{r-1}\,x^{33-3r}$$

$$x^{33-3r} = x^0$$

$$33 - 3r = 0 \Longrightarrow 3r = 33 \Longrightarrow r = 11$$

رتبة الحد الخالي من x هو r = 5

$$P_{11} = C^{15}_{10} = \frac{15\times14\times13\times12\times11}{5\times4\times3\times2\times1} = 3\times7\times13\times11 = 3003$$

مثال10/ جد قيمة $(101)^3$ [باستخدام مبرهنة ذات الحدين]

الحل /

$$(101)^3 = (100+1)^3$$
$$= C^3_0(100)^3 - C^3_1(100)^3 + C^3_2(100) + 1$$
$$= 1000000 - 3\times10000 + 3\times100 + 1$$
$$= 1000000 - 30000 + 300 + 1 = 1030301$$

س2/ اوجد الحد الثالث في المفكوك $(x - 3y)^7$

$$P_r = C^n_{r-1}\, x^{n-r+1}\, y^{r-1}$$
$$P_3 = C^7_2\, x^5 (-3y)^2$$
$$= \frac{P^7_2}{2!} x^5(9y^2) = \frac{7\times6}{2\times1} x^5(9y^2) = 21 \times 9x^5y^2 = 189x^5y^2$$

س3/ جد الحد السادس في المفكوك $(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{3})^8$

$$P_r = C^n_{r-1}\, x^{n-r+1}\, y^{r-1}$$
$$P_6 = C^8_5\, (\frac{x^2}{2})^3 (-\frac{x}{3})^5 = \frac{8\times7\times6\times5\times4}{5\times4\times3\times2\times1} \times \frac{x^6}{8}\left(-\frac{x^5}{243}\right) = -\frac{7x^{11}}{243}$$

س4/ جد الحد الوسط في المفكوك $(a - \frac{2}{a})^{12}$

الحل / الاس عدد زوجي فيوجد حد اوسط واحد رتبته $= \frac{n}{2} + 1$

$$\frac{n}{2} + 1 = \frac{12}{2} + 1 = 7$$

$$P_r = C^n_{r-1}\, x^{n-r+1}\, y^{r-1}$$
$$P_7 = C^{12}_6 (a)^6 (-\frac{2}{a})^6 = \frac{12\times11\times10\times9\times8\times7}{6\times5\times4\times3\times2\times1} \cdot a^6 \cdot \frac{64}{a^6}$$
$$= 2 \times 11 \times 2 \times 3 \times 7 \times 64 = 59136$$

س5/ جد الحدين الوسطين في المفكوك $(2a - 1)^7$

الحل / الأس عدد فردي فيوجد حدان أوسطان رتبتاهما $= \frac{n+1}{2}$, $\frac{n+1}{2} + 1$

$$\frac{n+1}{2} + 1 = \frac{7+1}{2} + 1 = 5 \quad , \quad \frac{n+1}{2} = \frac{7+1}{2} = 4$$

$$P_r = C^n_{r-1}\, x^{n-r+1}\, y^{r-1}$$

$$P_4 = C^7_3\, (2a)^4 (-1)^3 = \frac{7\times6\times5}{3\times2\times1} \cdot 16a^4(-1) = -560a^4$$
$$P_5 = C^7_4\, (2a)^3 (-1)^4 = \frac{7\times6\times5\times4}{4\times3\times2\times1} \cdot 8a^3 = 280a^3$$

س6/ جد الحد الذي يحوي على x^4 في المفكوك $(1+x^2)^6$ ثم جد معامله .

الحل/ نفرض ان رتبة الحد الذي يحوي على x^4 في المفكوك $(1+x^2)^6$ هو r

$$P_r = C_{r-1}^{6}\,(1)^{n-r+1}\,(x^2)^{r-1}$$
$$= C_{r-1}^{6}\,x^{2r-2}$$
$$x^{2r-2} = x^4$$
$$2r-2=4 \Longrightarrow 2r=4+2 \Longrightarrow 2r=6 \Longrightarrow r=3$$
$$P_3 = C_2^6\,(1)^4\,(x^2)^2 = 15x^4$$

∴ المعامل = 15

س7/ جد معامل x^2 في المفكوك $\left(x^3+\frac{2}{x^2}\right)^9$

الحل/ نفرض ان رتبة الحد الذي يحوي على x^2 في المفكوك هو r

$$P_r = C_{r-1}^{9}\,(x^3)^{9-r+1}\left(\frac{2}{x^2}\right)^{r-1}$$
$$= C_{r-1}^{9}\,(x^3)^{10-r}(2x^{-2})^{r-1}$$
$$= C_{r-1}^{9}\,x^{30-3r}(2)^{r-1}x^{-2r+2}$$
$$= C_{r-1}^{9}\,(2)^{r-1}x^{32-5r}$$
$$x^{32-5r} = x^2$$
$$32-5r=2 \Longrightarrow 5r=32-2 \Longrightarrow 5r=30 \Longrightarrow r=6$$

رتبة الحد الذي يحوي x^2 ⟵ $r = 6$

$$P_6 = C_5^9\,(2)^5 = \frac{9\times8\times7\times6\times5}{5\times4\times3\times2\times1}\times32 = 9\times2\times7\times32 = 4032$$

∴ المعامل = 4032

س8/ جد الحد الخالي من x في المفكوك $\left(x^2+\frac{2}{x^3}\right)^{10}$

الحل/ الحد الخالي من x يعني انه يحتوي على x^0

نفرض ان رتبة الحد الخالي من x في المفكوك هو r

$$P_r = C_{r-1}^{10}\,(x^2)^{10-r+1}\left(\frac{2}{x^3}\right)^{r-1}$$
$$= C_{r-1}^{10}\,(x^2)^{11-r}(2x^{-3})^{r-1}$$
$$= C_{r-1}^{10}\,x^{22-2r}(2)^{r-1}x^{-3r+3}$$
$$= C_{r-1}^{10}\,(2)^{r-1}x^{25-5r}$$
$$x^{25-5r} = x^0$$
$$25-5r=0 \Longrightarrow 5r=25 \Longrightarrow r=5$$

رتبة الحد الخالي من x هو $r = 5$

$$P_5 = C_4^{10}\,(2)^4 = \frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}\times16 = 10\times3\times7\times16 = 3360$$

س9/ جد قيمة $(99)^4$ [باستخدام مبرهنة ذات الحدين]

الحل /

$(99)^4 = (100-1)^4$

$= C_0^4(100)^4 - C_1^4(100)^3 + C_2^4(100)^2 - C_3^4(100) + 1$

$= 100000000 - 4\times 1000000 + 6\times 10000 - 4\times 100 + 1$

$= 100000000 - 4000000 + 60000 - 400 + 1 = 96059601$

س10/ جد قيمة $(102)^4 - (98)^4$

الحل /

$(102)^4 = (100+2)^4 = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5$

$(98)^4 = (100 - a)^4 = p_1 - p_2 + p_3 - p_4 + p_5$

بالطرح

$(100+2)^4 - (100-2)^4 = 2p_2 + 2p_4$

$= 2(p_2 + p_4)$

$= 2(C_1^4(100)^3 2 + c_3^4(100)(2)^3)$

$= 2(8000000 + 3200)$

$= 16000000 + 6400 = 16006400$

س١١/ جد قيمة $(2+\sqrt{3})^7 + (2-\sqrt{3})^7$

الحل /

$(2+\sqrt{3})^4 = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7 + p_8$

$(2-\sqrt{3})^4 = p_1 - p_2 + p_3 - p_4 + p_5 - P_6 + p_7 - p_8$

بالجمع

$\mathbf{(2+a)^4 + (2-a)^4 = 2p_1 + 2p_3 + 2p_5 + 2p_7}$

$\mathbf{= 2(p_1 + p_3 + p_5 + p_7)}$

$\mathbf{= 2(2^7 + C_2^7 2^5 \sqrt{3}^2 + C_4^7 2^3 (\sqrt{3})^4 + C_6^7 2 (\sqrt{3})^6)}$

$\mathbf{= 2(128 + 21\times 32\times 3 + 35\times 8\times 9 + 7\times 2\times 27)}$

$\mathbf{= 2(128 + 2016 + 2520 + 378) = 2\times 5042 = 10084}$

نهاية الفصل الأول

الاسئلة الوزارية (الفصل الاول) لعام 2015 التمهيدي

س١/ 8 اشخاص يريدون الجلوس ولم يجدوا امامهم سوى (5) كراسي ، فبكم طريقة يمكن ملء هذه الكراسي الخمسة ؟

س٢/ جد الحد الخامس في مفكوك $(x-3y)^8$

س٣/ جد قيمة n اذا علمت ان $12\binom{n}{3} = \binom{n+1}{4}$

الاسئلة الوزارية (الفصل الاول) لعام 2015 الدور الاول

س١/ كيس فيه (10) كرات حمراء ، (6) كرات بيضاء يراد سحب (4) كرات معا دون إرجاع ، ما عدد الطرق التي تكون فيها الكرات المسحوبة من نفس اللون ؟

س٢/جد قيمة (n) اذا علمت ان $P_2^3 = \frac{n!}{(n-2)!}$

س٣/جد الحد الذي يحوي x^2 في المفكوك $(x^3 + \frac{2}{x^2})^9$

س٤/ كم عدد رمزه مكون من (3) ارقام يمكن تكوينه باستخدام الأرقام 9 , 8 , 7 , 6 , 5 , 4 , 3, 2 على ان يكون العدد فردياً وتكرار غير مسموح فيه للرقم .

الاسئلة الوزارية (الفصل الاول) لعام 2015 الدور الثاني

س١/كم كلمة بمعنى او بدون معنى يمكن تكوينها من كلمة (سنكفيكهم) مكونه من أربعة أحرف على ان لا يسمح بتكرار الحرف في الكلمة الواحدة ؟

س٢/ بكم طريقة يمكن اختيار لجنة مكونة من(3) موظفين وموظفتين من بين (8) موظفين وخمسة موظفات .

س٣/جد الحدين الاوسطين من المفكوك $(2x-1)^7$

س٤/ اذا كانت $3(n!) = 360$ فما قيمة n ؟

الاسئلة الوزارية (الفصل الاول) لعام 2015 الدور الثالث

س١// عدد الطلاب المتفوقين في احدى المدارس لهذا العام **(10)** طلاب يراد اختبار **(6)** منهم ليمثلوا احدى اللجان في المدرسة ، ما عدد طرق الاختيار الممكنة ؟

س٢ / جد قيمة n اذا كان $p(n,5) = 6p(n,4)$

س٣/جد الحد الذي يحوي x^4 في المفكوك $(1+x^2)^9$ ثم جد معامله .

س٤/كم عدداً مكون رمزه من **(3)** مراتب واقل من **400** يمكن تكوينه من الأرقام 7, 6, 5 , 4, 3 , 2 **علما ان** التكرار غير مسموح به .

الاسئلة الوزارية (الفصل الاول) لعام 2014 التمهيدي

س١/ جد قيمة n اذا كان $P_5^n = 8 \times p_4^n$

س٢/ كم عددا مكونا من ثلاث مراتب يمكن تكوينه من الارقام {7.6,5,4,3,2,1} بحيث

يكون العدد زوجيا وتكرار العدد غير مسموح به ؟

س٣/جد الحد الثالث من المفكوك $(x - 3y^2)^7$

س٤/ كم كلمة يمكن تكوينها مكونه من اربعة حروف مختلفة من كلمة (سنكفيكهم) ؟

===

الاسئلة الوزارية (الفصل الاول) لعام 2014 الدور الاول

س١/بكم طريقة يمكن اختيار اربعة اشخاص من بين عشرة اشخاص لشغل اربع وظائف مختلفة

س٢ / جد مفكوك $(3x^2 + 2y)^3$.

س٣/ اذا كانت $n! = 6(n-2)!$ جد قيمة n ؟

س٤/ كم قطعة مستقيم يمكن تحديدها بنقطتين من مجموعة فيها (7) نقاط ولا توجد ثلاث

منها على استقامة واحدة ؟

===

الاسئلة الوزارية (الفصل الاول) لعام 2014 الدور الثاني

س١/اذا كان لدى فتاة (7) قمصان مختلفة الألوان (5) تنورات مختلفة الألوان و (3) أحذية مختلفة فبكم زي مختلف مكون من قميص وتنورة وحذاء يمكن ان تظهر به الفتاة

س٢/ هل يوجد حد خالي من x في مفكوك $(x^2 - \frac{1}{x})^{15}$ بين ذلك

س٣/ جد قيمة : $\frac{1}{56}[P_2^8 + P_3^8]$

===

الاسئلة الوزارية (الفصل الاول) لعام 2014 الدور الثالث

س١/ اذا كان اسئلة امتحان لمادة الرياضيات (10) اسئلة وكان المطلوب حل (7) اسئلة منها على ان نختار (4) من الخمسة الاولى ، فبكم طريقة يمكن الاجابة عنها ؟

س٢/جد قيمة (n) اذا علمت ان $2p(n\,,2) = 4!$

س٣/ جد الحد الخامس في مفكوك $\left(\frac{x}{2} - 3\right)^8$

س٤/ كم عدد يمكن تكوينة من () ارقام ولا يزيد عن (500) ارقامه ماخوذة من الارقام {2,3.5,6,7,8}

الاسئلة الوزارية (الفصل الاول) لعام 2013 الدور اتمهيدي

س١/ لدى احمد (5) سترات مختلفة (6) بنطلونات مختلفة (8) قمصان مختلفة فبكم زي مختلف يظهر به احمد مكون من ستره وبنطلون وقميص ؟

س٢ / جد الحد الثالث من مفكوك $(x-3y^2)^7$.

س٣/ جد قيمة n اذا كان $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}=30$

س٤/ صندوق يحتوي على (6) كرات حمراء ، (4) كرات بيضاء يراد سحب (5) كرات منه بشرط ان تكون (3) كرات منها حمراء فقط بكم طريقة يمكن أجراء السحب ؟

الاسئلة الوزارية (الفصل الاول) لعام 2013 الدور الاول

س١/ كم كلمة يمكن مؤلفة من أربعة حروف مختلفة يمكن تكوينها من الاأحرف : أ، ب ، ج،د،هـ

س٢/ جد معامل x^2 في المفكوك $(x^3+\frac{2}{x^2})^9$

س٣/ جد قيمة n اذا كان $P_5^n=8\times p_4^n$

س٤/ يراد تشكيل لجنة من ستة أعضاء من بين (5) طلاب ، (8) مدرسين فبكم طريقة يمكن أن تكون اللجنة محتوية على مدرسين اثنين فقط ؟

الاسئلة الوزارية (الفصل الاول) لعام 2013 الدور الثاني

س١/ لدى احمد (6) قمصان مختلفة الألوان (7) بنطلونات مختلفة (4) احذية مختلفة فبكم زي مختلف يظهر به احمد مكون من ستره وبنطلون وقميص ؟

س٢ / جد الحد الخالي من مفكوك $(x^2-\frac{1}{x})^{15}$.

س٣/ جد قيمة n اذا كان $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}=30$

س٤/كم عدداً مكون رمزه من ثلاثة أرقام يكون فردياً يمكن تكوينه باستخدام الأرقام

$\{1,2,3,4,5,6,7\}$ **اذا كان** التكرار الرقم في العدد نفسه مسموحا به

الاسئلة الوزارية (الفصل الاول) لعام 2013 الدور الثالث

س١/ بكم طريقة يمكن اختيار ثلاثة اشخاص من بين عشرة اشخاص لشغل ثلاثة وظائف مختلفة .

س٢/ جد قيمة n اذا كان $P_2^n=72$

س٣/ جد الحدين الوسطين في مفكوك $(2a-1)^7$

س٤/ اذا كان لدينا المجموعة $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ فكم عددا يمكن تكوينة رمزه مكون ثلاثة ارقام واكبر (200) اذا سمح بتكرار الرقم في العدد نفسه ؟

الاسئلة الوزارية (الفصل الاول) لعام 2012 التمهيدي

س١/ كم عددا فرديا مكونا من (3) ارقام يمكن تكوينه باستخدام الأرقام 9 , 8 , 7 , 6 , 5 , 4 , 3, والتكرار غير مسموح به للرقم في العدد نفسه . (٢٠١٢ تمهيدي)

س٢/ جد قيمة n اذا كان $\frac{n!}{(n-2)!} = 30$ وزاري ٢٠١٢ تمهيدي

س٣/ جد الحد الثالث في المفكوك $(x - 3y^2)^7$

الاسئلة الوزارية (الفصل الاول) لعام 2012 الدور الاول

س١/ صاحب محل ساعات لديه (10) ماركات مختلفة منها وكل ماركة فيها (5) أحجام وكل حجم (7) الوان فكم ساعة في المحل ؟

س٢/ جد الحد الأوسط من مفكوك $(a - \frac{2}{a})^{12}$

س٣/صندوق يحتوي على (4) كرات حمراء ، (8) كرات بيضاء سحبت ثلاث كرات معاً

جد عدد طرق سحب : ١- أثنتان حمراء و واحدة بيضاء . ٢- على الأقل اثنتان حمراء

س ٤ / جد قيمة n اذا كان $2\binom{n}{2} = \binom{n+1}{3}$

الاسئلة الوزارية (الفصل الاول) لعام 2012 الدور الثاني

س٣/صندوق يحتوي على (10) كرات حمراء ، (5) كرات خضراء و(3) كرات بيضاء سحب (5) كرات على ان تكون ضمن السحبه كرنين حمراء وكره واحة خضراء ، فكم طريقة لذلك .

س٢/ جد قيمة n اذا علمت ان $6\binom{n}{3} = \binom{n+1}{4}$ وزاري ٢٠١٢ الدور الثاني

س٣/ جد الحد الذي يحتوي على x^4 من مفكوك : $(1 - x^2)^6$

س٤/ بكم طريقة يمكن ان يجلس (10) طلاب على (4) كراسي فقط ؟

الاسئلة الوزارية (الفصل الاول) لعام 2012 الدور الثالث

س ١/ كم كلمة يمكن تكوينها من ثلاثة حروف من أحرف كلمة (زيزفون) بمعنى او بدون معنى دون السماح بتكرار الحرف في الكلمة الواحدة ؟

س٢/ جد قيمة n اذا كان $C_{20}^{n} = C_{35}^{n}$ وزاري ٢٠١٢ الدور الثالث

س٣/ جد الحد الذي يحوي (a^8) في المفكوك $(3 + a^2)^8$ ثم جد معامله .

س٤/ اذا كان عدد الاسئلة في ورقة الامتحان (6) والمطلوب الاجابة عن خمسة اسئلة ، فبكم طريقة يمكن ذلك ؟

ملزمة

الرياضيات

Mathematics

للصف السادس الادبي

أعداد الأستاذ

عبدالسلام محمد علي

2016 - 2017

الفصل الثاني

الـغـايـة

والاستمراريـة

أعداد الاستاذ

عبدالسلام محمد علي

Limit of Function غاية الدالة

1- غاية الدالة الثابتة = الثابت نفسه $\lim_{x\to a} f(x) = c$ ⟹ $f(x) = c$

مثال / جد $\lim_{x\to -2} 5$

الحل /

$$\lim_{x\to -2} 5 = 5$$

مثال / جد $\lim_{x\to 0} \sqrt{7}$

الحل /

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{7} = \sqrt{7}$$

2- غاية الدالة كثيرة الحدود : أي الدالة لا تحتوي على كسر لإيجاد الغاية نعوض مباشرة في الدالة

-مثال / جد $\lim_{x\to -1} (x^3 + 2x + 3)$

الحل /

$$\lim_{x\to -1} (x^3 + 2x + 3) = (-1)^3 + 2(-1) + 3 = -1 - 2 + 3 = 0$$

==

مثال / جد $\lim_{x\to -3} (x^3 + 2x)$

الحل /

$$\lim_{x\to -3} (x^3 + 2x) = (-3)^3 + 2(-3) = -27 - 6 = -33$$

==

ملاحظة / اذا كانت الدالة جذريه نعوض مباشرة بشرط ان يكون الناتج اكبر او يساوي صفر

مثال / جد $\lim_{x\to 1} \sqrt{4x + 5}$

الحل /

$$\lim_{x\to 1} \sqrt{4x + 5} = \sqrt{4(1) + 5} = \sqrt{9} = 3$$

==

مثال / جد $\lim_{x\to -2} \sqrt{x + 2}$

الحل /

$$\lim_{x\to -2} \sqrt{x + 2} = \sqrt{-2 + 2} = \sqrt{0} = 0$$

٣ـ اذا كانت الدالة الكسرية توجد حالتين هما

١ـ التعويض المباشر

نستخدم طريقة التعويض عندما نعوض في المقام يكون المقام لا يساوي صفر كما في الأمثلة

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^4+1}{x+1} = \frac{(-2)^4+1}{-2+1} = \frac{16+1}{-1} = -17$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^4+5}{2x+1} = \frac{(0)^4+5}{0+1} = \frac{5}{1} = 5$$

٢ـ طريقة التحليل

نستخدم طريقة التحليل عندما نعوض يكون المقام يساوي صفر كما في الأمثلة الآتية

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim_{x\to 3} x+3 = 3+3 = 6$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2} = \operatorname{Lim}_{x\to 2} x^2+2x+4 = 4+4+4 = 12$$

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2+2x}{x^2-x-6} = \lim_{x\to -2} \frac{x(x+2)}{(x-3)(x+2)} = \lim_{x\to -2} \frac{x}{x-3} = \frac{-2}{-2-3} = \frac{-2}{-5} = \frac{2}{5}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^3-27}{x^2+2x-15} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x+5)(x-3)} = \lim_{x\to 3} \frac{x^2+3x+9}{x+5} = \frac{9+9+9}{3+5} = \frac{27}{8}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^4-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1}(x+1)(x^2+1) = (1+1)(1+1) = 4$$

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^3+8}{x^4-16}=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{(x^2-4)(x^2+4)}=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{(x+2)(x-2)(x^2+4)}$$

$$=\lim_{x\to-2}\frac{(x^2-2x+4)}{(x-2)(x^2+4)}=\frac{4+4+4}{(-2-2)(4+4)}=\frac{12}{-4\times8}=\frac{12}{-32}=-\frac{3}{8}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3+7x^2-8x}{3x^2-3}=\lim_{x\to1}\frac{x(x^2+7x-8)}{3(x^2-)}=\lim_{x\to1}\frac{x(x+8)(x-1)}{3(x-1)(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x(x+8)}{3(x+1)}=\frac{1(1+8)}{3(1+1)}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$$

الأستاذ عبدالسلام محمد

الدالة كسرية وتحتوي على جذر

الضرب في العامل المرافق

نستخدم هذه الطريقة عندما نعوض يكون المقام يساوي صفر كما في الأمثلة الآتية

$$\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}\times\frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2}=\lim_{x\to3}\frac{x+1-4}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}=\lim_{x\to3}\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}=\frac{1}{\sqrt{3+1}+2}=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to\sqrt2}\frac{x^2-2}{x-\sqrt2}=\lim_{x\to\sqrt2}\frac{x^2-2}{x-\sqrt2}\times\frac{x+\sqrt2}{x+\sqrt2}=\lim_{x\to\sqrt2}\frac{(x^2-2)(x+\sqrt2)}{x^2-2}$$

$$=\lim_{x\to\sqrt2}x+\sqrt2=\sqrt2+\sqrt2=2\sqrt2$$

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{\sqrt x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{\sqrt x+1}\times\frac{\sqrt x+1}{\sqrt x+1}=\lim_{x\to1}\frac{(x^2-1)(\sqrt x+1)}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)(\sqrt x+1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}(x+1)(\sqrt x+1)=(1+1)(\sqrt1+1)=2\times2=4$$

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-9}{\sqrt{3x}-3}=\frac{1-9}{\sqrt3-3}=\frac{-8}{\sqrt3-3}$$

$$\lim_{x\to-1} \frac{x^2+x}{\sqrt{x+10}-3} = \lim_{x\to-1} \frac{x(x+1)}{\sqrt{x+10}-3} \times \frac{\sqrt{x+10}+3}{\sqrt{x+10}+3} = \lim_{x\to-1} \frac{x(x+1)(\sqrt{x+10}+3)}{x+10-9}$$

$$= \lim_{x\to-1} \frac{x(x+1)(\sqrt{x+10}+3)}{x+1} = \lim_{x\to-1} x\left(\sqrt{x+10}+3\right)$$

$$= -1\left(\sqrt{-1+10}+3\right) = -1(3+3) = -6$$

غاية الدالة المنفصلة

لإيجاد غاية الدالة المنفصلة عند $x \to a$ نتبع ما يلي :-

١- نجد غاية الدالة من اليمين $\lim_{x\to a} f(x)$ ونرمز لها بالرمز L_1

٢- نجد غاية الدالة من اليسار $\lim_{x\to a} f(x)$ ونرمز لها بالرمز L_2

٣- اذا كانت الغاية من اليمين = الغاية من السار $L_1 = L_2$ فان للدالة غاية عند $x \to a$

٤- اذا كانت الغاية من اليمين ≠ الغاية من السار $L_1 \neq L_2$ ليس للدالة غاية عند $x \to a$

مثال / لتكن $f(x) = \begin{cases} 1-x & x \le 2 \\ x+1 & x > 2 \end{cases}$ هل الدالة f(x) غاية عند 2 ؟

الحل /

$$\lim_{x\to2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to2} 1-x = 1-2 = -1 = L_1 \\ \lim_{x\to2} x+1 = 2+1 = 3 = L_2 \end{cases}$$

∴ ليس للدالة غاية لان $L_1 \neq L_2$

مثال / لتكن $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & x \ge 1 \\ 2x & x < 1 \end{cases}$ هل الدالة f(x) غاية عند 1 ؟

الحل /

$$\lim_{x\to1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to1} x^2+1 = 1+1 = 2 = L_1 \\ \lim_{x\to1} 2x = 2(1) = 2 = L_2 \end{cases}$$

∴ للدالة غاية لان $L_1 = L_2$

س٥ / لتكن $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & x > 2 \\ 2 - 2x & x \le 2 \end{cases}$

١- هل للدالة f(x) غاية عند 2 ؟

٢- جد $\lim_{x\to 1} f(x)$

الحل /

$$1)\ \lim_{x\to 2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 2} x^2 - 3 = 4 - 3 = 1 = L_1 \\ \lim_{x\to 2} 2 - 2x = 2 - 4 = -2 = L_2 \end{cases}$$

∴ ليس للدالة غاية لان $L_1 \neq L_2$

$$2)\ \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} 2 - 2x = 2 - 2(1) = 2 - 2 = 0$$

==

س٦ / لتكن $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \ge 2 \\ 2 - x & x < 2 \end{cases}$ هل للدالة f(x) غاية عند $x \to 2$ ؟ بين ذلك

الحل /

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 2} x^2 + 1 = 4 + 1 = 5 = L_1 \\ \lim_{x\to 2} 2 - x = 2 - 2 = 0 = L_2 \end{cases}$$

∴ ليس للدالة غاية لان $L_1 \neq L_2$

==

مثال٧ / لتكن $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & x \le 1 \\ 2x + a & x > 1 \end{cases}$ وان $\lim_{x\to 1} f(x)$ موجودة جد قيمة a ؟

الحل /

بما ان الغاية موجودة

الغاية من اليمين = الغاية من اليسار

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x)$$

$$\lim_{x\to 1^+} 2x + a = \lim_{x\to 1^-} x^2 + 2$$

$2(1) + a = 1+2$ ⟹ $2 + a = 3$ ⟹ $a = 3 - 2 = 1$

مثال٨ / لتكن $f(x) = \begin{cases} x^2 + a & x > 1 \\ b - 2x & x \leq 1 \end{cases}$

وكانت $\lim_{x \to 1} f(x)$ موجودة ، $\lim_{x \to -1} f(x) = 5$ جد قيمة a , b ؟

الحل /

$\lim_{x \to -1} f(x) = 5$

b – 2(-1) = 5 ⟹ b +2 = 5 ⟹ b = 5 – 2 = 3

بما ان الغاية موجودة

الغاية من اليمين = الغاية من اليسار

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x)$

$\lim_{x \to 1^+} x^2 + a = \lim_{x \to 1^-} 3 - 2x$

1 + a = 3 - 2 ⟹ 1 + a = 1 ⟹ a = 1 - 1 = 0

س٧ / لتكن $f(x) = \begin{cases} a + 2x & x \leq -1 \\ 3 - x^2 & x > -1 \end{cases}$

وكانت $\lim_{x \to -1} f(x)$ موجودة جد قيمة a حيث a ∈ R

الحل /

بما ان الغاية موجودة

الغاية من اليمين = الغاية من اليسار

$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^+} f(x)$

$\lim_{x \to -1^+} a + 2x = \lim_{x \to 1^-} 3 - x^2$

a – 2 = 3 – 1 ⟹ a - 2 = 2 ⟹ a = 2 + 2 = 4

س٨ / لتكن $f(x) = \begin{cases} 3x + a & x \geq 3 \\ x^2 - b & x < 3 \end{cases}$

وكانت $\lim_{x \to 3} f(x)$ موجودة وان $f(\sqrt{2}) = 5$ جد قيمة $a, b \in R$

الحل /

$f(\sqrt{2}) = 5$

$(\sqrt{2})^2 - b = 5$ ⟹ 2 - b = 5 ⟹ b = 2 – 5 = -3

بما ان الغاية موجودة

الغاية من اليمين = الغاية من اليسار

$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^-} f(x)$

$\lim_{x \to 3^+} 3x + a = \lim_{x \to 3^-} x^2 + 3$

9 + a = 9 + 3 ⟹ 9 + a = 12 ⟹ a = 12 - 9 = 3

س٢ / اذا كانت $\lim\limits_{x\to4} \frac{x^2-2x+6}{x+3} = 3a-4$ جد قيمة a حيث $a \in R$

الحل /

$$\lim_{x\to4} \frac{x^2-2x+6}{x+3} = 3a-4$$

$$\frac{16-2(4)+6}{4+3} = 3a-4$$

$$\frac{14}{7} = 3a-4$$

$2 = 3a - 4 \Longrightarrow 3a = 2 + 4$

$3a = 6 \Longrightarrow a = 2$

==

س٣ / اذا كانت $\lim\limits_{x\to a} \frac{x^2-a^2}{x-a} = 8$ جد قيمة a حيث $a \in R$

الحل /

$$\lim_{x\to a} \frac{(x-a)(x+a)}{x-a} = 8$$

$$\lim_{x\to a} x + a = 8$$

$a + a = 8 \Longrightarrow 2a = 8 \Longrightarrow a = 4$

==

مثال / اذا كانت $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^2+3x-1}{x+2} = 2a+3$ جد قيمة a حيث $a \in R$

الحل /

$$\lim_{x\to1} \frac{x^2+3x-1}{x+2} = 2a+3$$

$$\frac{1+3-1}{1+2} = 2a+3$$

$$\frac{3}{3} = 2a+3$$

$1 = 2a + 3 \Longrightarrow 2a = 1 - 3$

$2a = -2 \Longrightarrow a = -1$

==

س٤/ اذا كانت $f(x) = ax^2 + bx$ وكانت $\lim\limits_{x\to1} f(x) = 5$, $\lim\limits_{x\to-2} f(x) = 8$ جد قيمتي a , b

$\lim\limits_{x\to1} f(x) = 5 \Longrightarrow a(1)^2 + b(1) = 5 \Longrightarrow a + b = 5$ --------(1)

$\lim\limits_{x\to-2} f(x) = 8 \Longrightarrow 4a - 2b = 8 \Longrightarrow 2a - b = 8$ ------(2)

بالجمع

$3a = 9 \Longrightarrow a = 3$

نعوض قيمة $a = 3$ في معادلة رقم 1

$3 + b = 5 \Longrightarrow b = 5 - 3 = 2$

استمرارية الدالة عند النقطة

اذا كانت f دالة وكان العدد a ينتمي الى مجال الدالة f تكون الدالة f مستمرة اذا تحقق الشروط التالية

1- $f(a)$ معرفة

2- $\lim_{x\to a} f(x)$ موجودة

3- $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

مثال1 / ابحث استمرارية الدالة $f(x) = x^2 + 3$ عند $x = 1$ ؟

الحل /

1- $f(1) = 1^2 + 3 = 4$ الدالة موجودة

2- $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} x^2 + 3 = 1^2 + 3 = 4$

∴ غاية موجودة عند $x = 1$

3- $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$

F مستمرة عند $x = 1$

===

مثال2 / ابحث استمرارية الدالة $f(x) = \frac{x}{x+1}$ عند $x = 3$

1- $f(3) = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}$ معرفة

2- $\lim_{x\to 3} \frac{x}{x+1} = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}$ موجودة

3- $\lim_{x\to 3} f(x) = f(3)$

F مستمرة عند $x = 3$

===

مثال3 / ابحث استمرارية الدالة $f(x) = x^3 + x$ عند $x = 1$

الحل /

1- $f(1) = 1^3 + 1 = 1 + 1 = 2$ الدالة معرفة

2- $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} x^3 + x = 1^3 + 1 = 4$

∴ غاية موجودة عند $x = 1$

3- $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$

F مستمرة عند $x = 1$

مثال4 / لتكن $f(x) = 3x + 2$ هل f مستمرة عند $x = a$ ؟ بين ذلك

الحل /

أوسع مجال للدالة f هو R لكل $a \in R$ لنبرهن f مستمرة عند $x = a$

1- $f(a) = 3a + 2$ الدالة معرفة

2- $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} 3x + 2 = 3a + 2$

∴ غاية موجودة عند $x = a$

3- $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

F مستمرة عند $x = a$

==========

مثال5 / لتكن $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & x < 0 \\ x^2 + 1 & x \geq 0 \end{cases}$ هل f مستمرة عند $x = 0$ ؟ بين ذلك

الحل /

1- $F(0) = 0^2 + 1 = 1$

2- $\lim_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 0} 2x + 3 = 2(0) + 3 = 3 = L_1 \\ \lim_{x\to 0} x^2 + 1 = 0^2 + 1 = 1 = L_2 \end{cases}$

∴ غاية غير موجودة عند $x = 0$ لان $L_1 \neq L_2$

Fغير مستمرة عند $x = 0$

==========

مثال6 / لتكن $f(x) = \begin{cases} 2 - x & x < -1 \\ 2x^2 + 1 & x \geq -1 \end{cases}$ هل f مستمرة عند $x = -1$ ؟ بين ذلك

الحل /

1- $F(-1) = 2(-1)^2 + 1 = 2 + 1` = 3$

2- $\lim_{x\to -1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to -1} 2 - x = 2 - (-1) = 2 + 1 = 3 = L_1 \\ \lim_{x\to -1} 2x^2 + 1 = 2(-1)^2 + 1 = 2 + 1 = 3 = L_2 \end{cases}$

∴ غاية موجودة عند $x = -1$ لان $L_1 = L_2$

3- $\lim_{x\to -1} f(x) = f(-1) = 3$

F مستمرة عند $x = -1$

==========

مثال7 / ابحث استمرارية الدالة $f(x) = \frac{x+3}{x^2+1}$ عند $x = 1$

1- $f(1) = \frac{1+3}{1+1} = \frac{4}{2} = 2$ معرفة

2- $\lim_{x\to 1} \frac{1+x}{x^2+1} = \frac{1+3}{1+1} = \frac{4}{2} = 2$ موجودة

3- $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = 2$

F مستمرة عند $x = 1$

مثال8 / لتكن $f(x) = \begin{cases} 3x+1 & x \geq -1 \\ x^2 & x < -1 \end{cases}$ هل f مستمرة عند x = -1 ؟ بين ذلك

الحل /

1- f (-1) = 3(-1) + 1 = -3 + 1 = -2

2- $\lim_{x \to -1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \to -1} 3x+1 = -3+1 = -2 = L_1 \\ \lim_{x \to -1} x^2 = (-1)^2 = 1 = L_2 \end{cases}$

∴ غاية غير موجودة عند x = -1 لان $L_1 \neq L_2$

F غير مستمرة عند x = -1

==========

س1 / ابحث استمرارية الدالة $f(x) = x^3 + x^2 + 3$ عند x = 3 ؟

الحل /

1- $f(3) = (3)^3 + (3)^2 + 3 = 27 + 9 + 3 = 39$ الدالة موجودة

2- $\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} x^3 + x^2 + 3 = (3)^3 + (3)^2 + 3 = 27 + 9 + 3 = 39$

∴ غاية موجودة عند x = 3

3- $\lim_{x \to 3} f(x) = f(3)$

F مستمرة عند x = 3

==========

س2 / ابحث استمرارية الدالة $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ اثبت مستمرة في مجالها

أوسع مجال للدالة f هو R لكل $a \in R$

لنبرهن f مستمرة عند x = a

1- $f(a) = \frac{a^2}{a^2+1}$ معرفة

2- $\lim_{x \to 3} \frac{x^2}{x^2+1} = \frac{a^2}{a^2+1}$ موجودة

3- $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

F مستمرة عند x = a

==========

س3 / لتكن $f(x) = x^3$ ابحث استمرارية الدالة في مجالها

الحل / أوسع مجال للدالة f هو R لكل $a \in R$

لنبرهن f مستمرة عند x = a

1- $f(a) = a^3$ الدالة معرفة

2- $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} x^3 = a^3$

∴ غاية موجودة عند x = a

3- $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

F مستمرة عند x = a

س4/ لتكن $f(x)=\begin{cases}x^2-2 & x\geq -1\\ 3x+1 & x<-1\end{cases}$ ابحث استمرارية الدالة $x=-1$ ؟

الحل

1- F(-1) =(- 1)^2 – 2 = -1

2- $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2} x^2-2 = (-1)^2-2=-1=L_1\\ \lim\limits_{x\to 2} 3x+1 = 3(-1)+1 = -2 = L_2\end{cases}$

∴ ليس للدالة غاية لان $L_1 \neq L_2$

fغير مستمرة عند x = -1

==

س5/ لتكن $f(x) = |x-2|$ هل f مستمرة عند x = 2 ؟ بين ذلك

الحل / $f(x) = |x-2| = \begin{cases}x-2 & x\geq 2\\ -(x-2) & x<2\end{cases}$

1) $f(2) = 2-2 = 0$

2- $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = |x-2| = \begin{cases}\lim\limits_{x\to 2} x-2 = 2-2 = 0 = L_1\\ \lim\limits_{x\to 2} -(x-2) = -(2-2) = 0 = L_2\end{cases}$

∴ غاية موجودة عند x = 2 لان $L_1 = L_2$

3- $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2)$

F مستمرة عند x = 2

==

س6 / لتكن $f(x)=\begin{cases}1-2x & x\leq 2\\ 1-x^2 & x<2\end{cases}$ هل f مستمرة عند x = 2 ؟ بين ذلك

الحل /

1) $f(2) = 1 - 2(2) = 1-4 = -3$

2) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \begin{cases}\lim\limits_{x\to 2} 1-2x = 1-4 = -3 = L_1\\ \lim\limits_{x\to 2} 1-x^2 = 1-4 = -3 = L_2\end{cases}$

∴ غاية موجودة عند x = 2 لان $L_1 = L_2$

3) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2)$

F مستمرة عند x = 2

==

س7 / لتكن $f(x)=\begin{cases}ax+3 & x\geq 1\\ 3x^2+1 & x<1\end{cases}$ جد قيمة a اذا كانت f مستمرة عند x = 1

الحل/ بما ان الدالة مستمرة

الغاية من اليمين = الغاية مت اليسار

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

$\lim\limits_{x\to 1} ax+3 = \lim\limits_{x\to 1} 3x^2+1$

$a(1)+3 = 3(1)^2+1$

$a+3 = 3+1$ ⟶ $a = 4-3 = 1$

س8 / لتكن $f(x) = \begin{cases} 2x + b & x \le -1 \\ x^2 + a & x > -1 \end{cases}$ جد قيمة a , b اذا كانت f مستمرة عند x = -1 وان f(2) = 7

الحل /

$f(2) = 7$

$(2)^2 + a = 7 \longrightarrow 4 + a = 7 \longrightarrow a = 7 - 4 = 3$

بما ان الدالة مستمرة

الغاية من اليمين = الغاية مت اليسار

$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^+} f(x)$

$\lim_{x \to -1} 2x + b = \lim_{x \to -1} x^2 + 3$

$2(-1) + b = (-1)^2 + 3$

$-2 + b = 1 + 3 \longrightarrow b = 4 + 2 = 6$

نهاية الفصل الثــاني

الأستاذ عبدالسلام محمد علي

الرياضيات

Mathematics

للصف السادس الادبي

الفصل الثالث الاشتقاق

أعداد الأستاذ

عبدالسلام محمد علي

2016 - 2017

Differentiation الاشتقاق

المشتقة

١ـ المشتقة باستخدام التعريف

يرمز للمشتقة الأولى بإحدى الرموز $f^{/}(x)$, $y^{/}$, $\frac{dy}{dx}$

يرمز للمشتقة الثانية بإحدى الرموز $f^{//}(x)$, $y^{//}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$

يقال للدالة الحقيقية $y = f(x)$ انها قابلة للاشتقاق عند $x_\circ$ في مجال الدالة اذا كانت الغاية الاتية موجودة

$$f^{/}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_\circ+\Delta x)-f(x_\circ)}{\Delta x}$$

مثال / جد $f(x) = x^2$ جد $f^{/}(3)$ باستخدام التعريف

$$f^{/}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_\circ+\Delta x)-f(x_\circ)}{\Delta x}$$

$$f^{/}(3) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(3+\Delta x)-f(3)}{\Delta x}$$

$$f^{/}(3) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(3+\Delta x)^2-(3)^2}{\Delta x}$$

$$f^{/}(3) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{9+6\Delta x+(\Delta x)^2-9}{\Delta x}$$

$$f^{/}(3) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$f^{/}(3) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(6+\Delta x)}{\Delta x}$$

$$f^{/}(3) = \lim_{\Delta x \to 0} 6 + \Delta x = 6 + 0 = 6$$

مثال / جد $f(x) = x^2 + x + 1$ جد $f^{/}(2)$ باستخدام التعريف

$$f^{/}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_\circ+\Delta x)-f(x_\circ)}{\Delta x}$$

$$f^{/}(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$$

$$f^{/}(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2+\Delta x)^2+(2+\Delta x)+1-[(2)^2+2+1]}{\Delta x}$$

$$f^{/}(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4+4\Delta x+(\Delta x)^2+2+\Delta x+1-7}{\Delta x}$$

$$f^{/}(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$f^{/}(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(5+\Delta x)}{\Delta x}$$

$$f^{/}(2) = \lim_{\Delta x \to 0} 5 + \Delta x = 5 + 0 = 5$$

مثال / جد $f(x) = x^2 + 5x$ جد $f^{/}(3)$ باستخدام التعريف

$$f^{/}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_\circ+\Delta x)-f(x_\circ)}{\Delta x}$$

$$f^{/}(3) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(3+\Delta x)-f(3)}{\Delta x}$$

$$f^{/}(3) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(3+\Delta x)^2+5(2+\Delta x)-[(2)^2+5(3)]}{\Delta x}$$

$$f^{/}(3) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{9+6\Delta x+(\Delta x)^2+10+5\Delta x-(4+15)}{\Delta x}$$

$$f^{/}(3) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{19+11\Delta x+(\Delta x)^2-19}{\Delta x}$$

$$f^{/}(3) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(11+\Delta x)}{\Delta x}$$

$$f^{/}(3) = \lim_{\Delta x \to 0} 11 + \Delta x = 11 + 0 = 11$$

تطبيقات على المشتقة

١ـ التطبيقات الهندسية

لإيجاد معادلة كل من المماس والعمود على المماس للدالة .

١ ـ نجد نقطة التماس (x_1 , y_1) وذلك بتعويض قيمة x في الدالة الاصلية ونجد قيمة y

٢ـ نشتق الدالة ثم نعوض قيمة x في المشتقة فنحصل ميل المماس m

٣ـ نعوض نقطة التماس والميل في المعادلة $y - y_1 = m(x - x_1)$

مثال/ اذا كان $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$ جد باستخدام التعريف $f^{/}(2)$ ثم جد معادلة المماس للمنحني عند هذه النقطة

الحل / نعوض قيمة $x = 2$ في الدالة الأصلية $f(x)$

$f(x) = 2(2)^2 + 3(2) + 1 = 8 + 6 + 1 = 15 \Longrightarrow (2 , 15)$

$$f^{/}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_\circ + \Delta x) - f(x_\circ)}{\Delta x}$$

$$f^{/}(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x}$$

$$f^{/}(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(2 + \Delta x)^2 + 3(2 + \Delta x) + 1 - 15}{\Delta x}$$

$$f^{/}(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{8 + 8\Delta x + 2(\Delta x)^2 + 6 + 3\Delta x + 1 - 15}{\Delta x}$$

$$f^{/}(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{11\Delta x + 2(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$f^{/}(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(11 + 2\Delta x)}{\Delta x}$$

$$f^{/}(2) = \lim_{\Delta x \to 0} 11 + 2\Delta x = 11 + 0 = 11$$

نعوض نقطة التماس (2 , 15) والميل = 11 في معادلة المماس

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 15 = 11(x - 2)$

$y - 15 = 11x - 22$

$11x - y + 15 - 22 = 0$

$11x - y - 7 = 0$

مثال / لتكن $f(t) = 2t^2 + 3$ تمثل حركة جسم في اي لحظة بالأمتار جد موقع الجسم وسرعته بعد 2 ثانية من بدأ الحركة .

الحل /

لايجاد موقع الجسم نعوض $t = 2$ في الدالة الأصلية

$$f(2) = 2(2)^2 + 3 = 8 + 3 = 11$$

سرعة الجسم = المشتقة عند $t = 2$

$$f^{/}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$$

$$f^{/}(2) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(2+\Delta t)-f(2)}{\Delta t}$$

$$f^{/}(2) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2(2+\Delta t)^2+3-11}{\Delta t}$$

$$f^{/}(2) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{8+8\Delta t+2(\Delta t)^2+3-11}{\Delta t}$$

$$f^{/}(2) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{8\Delta t+2(\Delta t)^2}{\Delta t}$$

$$f^{/}(2) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta t(8+2\Delta t)}{\Delta t}$$

$$f^{/}(2) = \lim_{\Delta t \to 0} 8 + 2\Delta t = 8 + 0 = 8$$ متر / ثا

مثال / لتكن $v(t) = 3t^2$ جد التعجيل بعد 2 ثانية .

الحل /

$$a(2) = v^{/}(2) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(2+\Delta t)-v(2)}{\Delta t}$$

$$a(2) = v^{/}(2) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{3(2+\Delta t)^2-3(2)^2}{\Delta t}$$

$$a(2) = v^{/}(2) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{12+12\Delta t+3(\Delta t)^2-12}{\Delta t}$$

$$a(2) = v^{/}(2) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{12\Delta t+3(\Delta t)^2}{\Delta t}$$

$$a(2) = v^{/}(2) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta t(12+3\Delta t)}{\Delta t} = 12 + 3(0) = 12$$

قواعد المشتقة

١ ـ مشتقة الثابت = صفر

مثال / جد المشتقة للدوال الآتية

1- $f(x) = 6 \Longrightarrow f'(x) = 0$

2- $f(x) = \sqrt{5} \Longrightarrow f'(x) = 0$

3- $f(x) = a \Longrightarrow f'(x) = 0$

٢ ـ مشتقة المتغير $f(x) = x^n$ $f'(x) = nx^{n-1}$ $f(x) = x^2$

مثال / جد المشتقة للدوال الآتية

1) $f(x) = x \Longrightarrow f'(x) = 1$

2) $f(x) = x^2 \Longrightarrow f'(x) = 2x$

3) $f(x) = x^3 \Longrightarrow f'(x) = 3x^2$

4) $f(x) = x^4 \Longrightarrow f'(x) = 4x^3$

5) $f(x) = x^5 \Longrightarrow f'(x) = 5x^4$

6) $f(x) = 2x \Longrightarrow f'(x) = 2$

7) $f(x) = 3x^2 \Longrightarrow f'(x) = 6x$

8) $f(x) = 5x^3 \Longrightarrow f'(x) = 15x^2$

9) $f(x) = x^{-2} \Longrightarrow f'(x) = -2x^{-3}$

10) $f(x) = x^{-3} \Longrightarrow f'(x) = -3x^{-4}$

11) $f(x) = x^{-4} \Longrightarrow f'(x) = -4x^{-5}$

12) $f(x) = 3x^{-5} \Longrightarrow f'(x) = -15x^{-6}$

مشتقة الجذور

1) $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Longrightarrow f^{/}(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

2) $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} \Longrightarrow f^{/}(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

3) $f(x) = \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}} \Longrightarrow f^{/}(x) = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}$

4) $f(x) = \sqrt[5]{x} = x^{\frac{1}{5}} \Longrightarrow f^{/}(x) = \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}$

5) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}} \Longrightarrow f^{/}(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$

6) $f(x) = \sqrt[5]{x^3} = x^{\frac{3}{5}} \Longrightarrow f^{/}(x) = \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}$

7) $f(x) = \sqrt[3]{x^{-2}} = x^{-\frac{2}{3}} \Longrightarrow f^{/}(x) = -\frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}$

٣ ـ مشتقة دوال كثيرة الحدود

$f(x) = h(x) \mp g(x) \Longrightarrow f^{/}(x) = h^{/}(x) \mp g^{/}(x)$

1) $f(x) = 3x^5 + 7x \Longrightarrow f^{/}(x) = 15x^4 + 7$

2) $f(x) = 3x^4 - 4x^2 + 6 \Longrightarrow f^{/}(x) = 12x^3 - 8x$

3) $f(x) = 2x^2 + \frac{1}{2}x \Longrightarrow f^{/}(x) = 4x + \frac{1}{2}$

4) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{3}x^3 + 9 \Longrightarrow f^{/}(x) = x - 4x^2$

5) $f(x) = \frac{1}{5}x^{-2} - \frac{2}{7}x^{-3} + 9 \Longrightarrow f^{/}(x) = \frac{-2}{5}x^{-3} + \frac{6}{7}x^{-4}$

٤- مشتقة حاصل ضرب دالتين = الاولى في مشتقة الثانية + الثانية في مشتقة الاولى

$f(x) = g(x).h(x) \longrightarrow f'(x) = g(x).h'(x) + h(x).g'(x)$

مثال / جد المشتقة للدالة $f(x) = (x^4 - x^2 + 1)(5x^6 - 3x)$

الحل /

$f(x) = (x^4 - x^2 + 1)(5x^6 - 3x)$

$f'(x) = (x^4 - x^2 + 1)(30x^5 - 3) + (5x^6 - 3x)(4x^3 - 2x)$

مثال / جد المشتقة للدالة $f(x) = (4 - x)(x^2 + 3)$ عند $x = 2$

الحل /

$f(x) = (4 - x)(x^2 + 3)$

$f'(x) = (4 - x)(2x) + (x^2 + 3)(-1)$

$f'(2) = (4 - 2)(2(2)) + (2^2 + 3)(-1) = 2(4) + (7)(-1) = 8 - 7 = 1$

٥- مشتقة حاصل قسمة دالتين = $\dfrac{\text{المقام في مشتقة البسط – البسط في مشتقة المقام}}{\text{المقام}^2}$

$f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)} \longrightarrow f'(x) = \dfrac{h(x).g'(x) - g(x).h'(x)}{(h(x))^2}$

مثال / جد المشتقة للدالة $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^4+1}$ عند $x = 1$

الحل/

$$f'(x) = \frac{(x^4+1)(3x^2)-(x^3+1)(4x^3)}{(x^4+1)^2}$$

$$f'(1) = \frac{(1^4+1)(3\times1^2)-(1^3+1)(4\times1^3)}{(1^4+1)^2} = \frac{2\times3-2\times4}{2^2} = \frac{6-8}{4} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

مثال / جد المشتقة للدالة $f(x)=\frac{4-5x}{x^2+x+1}$ عند $x = -1$

الحل/

$$f^{/}(x)=\frac{(x^2+x+1)(-5)-(4-5x)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}$$

$$f^{/}(-1)=\frac{((-1)^2+(-1)+1)(-5)-\big(4-5(-1)\big)(2(-1)+1)}{((-1)^2+(-1)+1)^2}$$

$$f^{/}(-1)=\frac{(1-1+1)(-5)-(4+5)(-2+1)}{(1-1+1)^2}=\frac{-5-(9)(-1)}{1}=-5+9=4$$

---

٦ - مشتق القوس مرفوعة الى أس = الاس في القوس مرفوع الى الأس -١ في مشتقة داخل القوس

$$f(x) = [h(x)]^n \Longrightarrow f'(x) = n[h(x)]^{n-1}(h'(x))$$

مثال / جد المشتقة الدوال الآتية $f(x) = (1-x)^3$

الحل /

$$f'(x) = 3(1-x)^2(-1) = -3(1-x)^2$$

مثال / جد المشتقة للدالة $f(x) = (x^3+x^2+x+1)^5$

الحل /

$$f'(x) = 5(x^3+x^2+x+1)^4(3x^2+2x+1)$$

مثال / اذا كانت $f(x) = (x^2-3)^4$ جد $f'(x)$, $f''(x)$ عند $x = 2$

الحل /

$$f^{/}(x) = 4(x^2-3)^3(2x) = 8x(x^2-3)^3$$

$$f^{/}(2) = 8(2)(2^2-3)^3 = 16(1)^3 = 16$$

$$f^{//}(x) = 8x(3)(x^2-3)^2(2x) + (x^2-3)^3(8)$$

$$f^{//}(x) = 48x^2(x^2-3)^2 + 8(x^2-3)^3$$

$$f^{//}(2) = 48(2)^2(2^2-3)^2 + 8(2^2-3)^3 = 192 + 8 = 200$$

ملاحظة / مشتقة الجذر التربيعي = مشتقة داخل الجذر على ٢ في الجذر

$f(x) = \sqrt{\quad} \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{\text{مشتقة داخل الجذر}}{2\sqrt{\quad}}$

مثال / اذا كانت $f(x) = \sqrt{x^3 + x^2 - 5}$ **جد** $f'(x)$

الحل /

$$f'(x) = \frac{3x^2+2x}{2\sqrt{x^3+x^2-5}}$$

مثال / اذا كانت $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$ **جد** $f'(x)$

الحل /

$$f'(x) = \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+1}}$$

مثال / جد المشتقة للدالة $y = x^4 + 5x^3 + 3$ **جد** $y'' \ , \ y'$

الحل

$y' = 4x^3 + 15x^2$

$y'' = 12x^2 + 30x$

مثال/ اذا كانت $f(x) = 2x^3 + 4 + \frac{3}{x}$ **جد** $f'(x) \text{ ، } f''(x) \text{ ، } f''(-1)$

الحل/

$f(x) = 2x^3 + 4 + 3x^{-1}$

$f'(x) = 6x^2 - 3x^{-2} \Longrightarrow f'(x) = 6x^2 - \frac{3}{x^2}$

$f''(x) = 12x + 6x^{-3} \Longrightarrow f''(x) = 12x + \frac{6}{x^3}$

$f''(-1) = 12(-1) + \frac{6}{(-1)^3} = -12 - 6 = -18$

مثال / جد المشتقة للدالة $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$ عند $x = 0$

الحل /

$$f(x) = (2x+1)^{\frac{-1}{2}}$$

$$f^{/}(x) = \frac{-1}{2}(2x+2)^{\frac{1}{2}}(2) = -\sqrt{2x+1}$$

$$f^{/}(0) = -\sqrt{2(0)+1} = -\sqrt{1} = -1$$

==========

س٣ / جد المشتقة للدالة $f(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^4$ عند $x = 1$

الحل /

$$f^{/}(x) = 4\left(\frac{x}{x+1}\right)^3\left(\frac{(x+1)(1)-x(1)}{(x+1)^2}\right)$$

$$f^{/}(1) = 4\left(\frac{1}{1+1}\right)^3\left(\frac{(1+1)(1)-1(1)}{(1+1)^2}\right)$$

$$f^{/}(1) = 4\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{2-1}{4}\right) = 4 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

==========

مثال / جد المشتقة للدالة $f(x) = x + \frac{3}{x^2+1}$ عند $x = -1$

الحل /

$$f^{/}(x) = 1 + \frac{-3(2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$f^{/}(x) = 1 - \frac{6x}{(x^2+1)^2}$$

$$f^{/}(-1) = 1 - \frac{6(-1)}{((-1)^1+1)^2} = 1 + \frac{6}{(2)^2}$$

$$= 1 + \frac{6}{(2)^2} = 1 + \frac{6}{4} = \frac{4+6}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

==========

س٣/ اذا كانت $f(x) = (x^3+3x^2-3)^{\frac{3}{2}}$ $f^{/}(x)$, $f^{/}(2)$

الحل /

$$f^{/}(x) = \frac{3}{2}(x^3+3x^2-3)^{\frac{1}{2}}(3x^2+6x) = \frac{3}{2}(3x^2+6x)\sqrt{x^3+3x^2-3}$$

$$f^{/}(2) = \frac{3}{2}(3(2)^2+6(2))\sqrt{2^3+3(2)^2-3}$$

$$= \frac{3}{2}(12+12)\sqrt{8+12-3} = \frac{3}{2}(24)\sqrt{17} = 36\sqrt{17}$$

أسئلة وزارية

س١ (٢٠١٣ دور ١)/ جد مشتقة الدوال الاتية :

1) $f(x) = (4 - x)(x^2 + 3)$ 2) $f(x) = 2x + \frac{3}{x^2+2}$

س٢ (٢٠١٣ تمهيدي و٢٠١٢دور٢)/ اذا كانت $f(x) = (x^2 - 3)^4$ جد $f'(x)$ عند $x = 2$

س٣ (٢٠١٢دور١)/ جد المشتقة ما يأتي 1) $f(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^4$ 2) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$

س٤/(٢٠١٣دور ٢/ ٢٠١١دور ١)جد مشتقة الدالة f(x) عندما x = 2 حيث $f(x) = (4 - x)(x^2 + 3)$

س٥/(٢٠٠٥ دور ٢)اذا كان $f(x) = (x^3 + 2x + 3)^{10}$ جد كلا من $f'(x)$, $f'(-1)$

س٦/(٢٠٠٥ دور ١)اذا كان $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + x$ جد كلا من $f'(1)$, $f''(2)$

س٧/(٢٠٠٣دور٢) اذا كان $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x + 1}$ جد $f'(x)$

س٨/(٢٠٠٣دور ١) جد $f'(x)$, $f''(x)$ للدالة $f(x) = (x^2 - 5)^6$ عند x = 2

س٩/(٢٠١٤ دور ٢) جد $f'(1)$ اذا كان $f(x) = \frac{4+5x}{x^2+x+1}$

س١٠/(٢٠١٠ دور١) جد $f'(x)$ لكل من الدوال :

1) $f(x) = \sqrt[3]{6x + 2}$ 2) $f(x) = (x^2 - 2x - 3)(2x + 1)$

س١١/(٢٠٠٦دور ٢) جد $f'(x)$, $f''(x)$ للدالة $f(x) = (x - 2)^4$ عند x = 3

س١٢/(٢٠٠٧ دور ١)اذا كان $f(x) = (x^2 + 2x - 1)^4$ جد كلا من $f'(x)$, $f'(1)$

تطبيقات على المشتقة

١ـ التطبيقات الهندسية

لإيجاد معادلة كل من المماس والعمود على المماس للدالة .

١ـ نجد نقطة التماس (x_1 , y_1) وذلك

أ – اذا كانت x معلومة في السؤال نعوض قيمة x في الدالة الاصلية ونجد قيمة y

ب – اذا كانت y معلومة في السؤال نعوض قيمة y في الدالة الاصلية ونجد قيمة x

٢ـ نشتق الدالة ثم نعوض قيمة x في المشتقة فنحصل ميل المماس m

٤ـ نعوض نقطة التماس والميل في المعادلة $y - y_1 = m(x - x_1)$

ملاحظة / ميل العمودي على المماس = ـ مقلوب ميل المماس

اي ميل العمود $= -\frac{1}{\text{ميل المماس}}$

==

مثال ١ / جد معادلة المماس لمنحني الدالة $f(x) = x^2 - 5x + 2$ عند $x = 1$

الحل/

نجد نقطة التماس وذلك بتعويض قيمة $x = 1$ في الدالة

$$y = f(1) = (1)^2 - 5(1) + 2 = 1 - 5 + 2 = -2$$

نقطة التماس هي $(1 , -2)$

نشتق الدالة ونعوض قيمة $x = 0$ في المشتقة لايجاد الميل $f'(x) = 2x - 5$

$$m = f'(1) = 2(1) - 5 = -3$$

نعوض نقطة التماس$(1 , -2)$ والميل في معادلة التماس $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y + 2 = -3(x - 1)$$

$$y + 2 = -3x + 3$$

$$3x + y + 2 - 3 = 0$$

معادلة المماس هي $3x + y - 1 = 0$

مثال٢ / جد معادلة المماس والعمودي على المماس للمنحني $y = \frac{2x+1}{3-x}$ عندما y = 5

الحل /

نعوض قيمة y = 5 في الدالة الأصلية لإيجاد قيمة x

$$5 = \frac{2x+1}{3-x}$$

5(3 –x) = 2x + 1

5(3 –x) = 2x + 1

15 – 5x = 2x + 1

5x + 2x = 15 – 1 ⟹ 7x = 14 ⟹ x = 2

نقطة التماس (2 , 5)

نشتق الدالة

$$y' = \frac{(3-x)(2)-(2x+1)(-1)}{(3-x)^2}$$

$$y' = \frac{6-2x+2x+1}{(3-x)^2} = \frac{7}{(3-x)^2}$$

ونعوض قيمة x = 2 في المشتقة لايجاد الميل

$$m = y' = \frac{7}{(3-2)^2} = 7$$

نعوض نقطة التماس(2 , 5) والميل في معادلة التماس $y - y_1 = m(x - x_1)$

y – 5 = 7(x – 2)

y – 5 = 7x – 14

7x – y -14 + 5 = 0 ⟹ 7x – y – 9 = 0 معادلة المماس

ميل المستقيم المعلوم = $-\frac{1}{\text{ميل المماس}} = \frac{-1}{7}$

$$y - 5 = \frac{-1}{7}(x-2)$$

7(y – 5) = -1(x – 2)

7y – 35 = - x + 2

x +7y – 35 - 2 = 0

معادلة العمود x +7y – 37 = 0

مثال٣ / جد معادلة المماس لمنحنى الدالة $f(x) = \sqrt[3]{x+3}$ عند x = 5

الحل/ نعوض النقطة x=5 في الدالة الأصلية

$$f(5) = \sqrt[3]{5+3} = 2$$

نقطة التماس (5 , 2)

نشتق الدالة ونعوض قيمة x = 5 في المشتقة لايجاد الميل

$$f^{/}(x) = \frac{1}{3}(x+3)^{\frac{-2}{3}}(1) = \frac{1}{3(x+3)^{\frac{2}{3}}}$$

$$f^{/}(5) = \frac{1}{3\sqrt{(5+3)^2}} = \frac{1}{3(2)^2} = \frac{1}{12}$$

نعوض نقطة التماس(5 , 2) والميل في معادلة التماس $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - 2 = \frac{1}{12}(x-5) \Longrightarrow 12(y-2) = x - 5$$

$$12y - 24 = x - 5 \Longrightarrow 12y - x - 24 + 5$$

معادلة المماس $12y - x - 19 = 0$

ملاحظة

١- اذا كان المنحني يتقاطع مع محور السيـنات نعوض عن y = 0 في الدالة ونجد قيم x

٢- اذا كان المنحني يتقاطع مع محور الصادات نعوض عن x = 0 في الدالة ونجد قيمy

مثال٤ / جد معادلة المماس للمنحني الدالة $y = x^2 + 1$ عند نقطة تقاطعها مع محور الصادات

الحل / نقطة التقطع مع محور الصادات يعني x = 0

$y = x^2 + 1 = 0^2 + 1 = 1$

النقطة هي (0 , 1)

$y = x^2 + 1$

$y' = 2x$

$y' = 2(0) = 0$

الميل = 0

نعوض نقطة التماس(0 , 1) والميل في معادلة التماس $y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 1 = 0(x - 0)$

$y - 1 = 0$

معادلة المماس هي $y - 1 = 0$

تمارين(3 – 3) ص81

س١ / جد معادلة مماس المنحني $f(x) = x^3 - 3x^2 + 9x + 5$ عند $x = 0$

الحل/ نجد نقطة التماس وذلك بتعويض قيمة $x = 0$ في الدالة

$f(x) = (0)^3 - 3(0)^2 + 9(0) + 5 = 5$

نقطة التماس هي $(0 , 5)$

نشتق الدالة ونعوض قيمة $x = 0$ في المشتقة لايجاد الميل $f'(x) = 3x^2 - 6x + 9$

$m = f'(0) = 3(0)^2 - 6(0) + 9 = 9$

نعوض نقطة التماس $(0 , 5)$ والميل في معادلة التماس $y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 5 = 9(x - 0)$

$y - 5 = 9x$

معادلة المماس هي $9x - y + 5 = 0$

س٢ / جد معادلة كل من المماس والعمود على المماس للمنحني $y = (x - 3)^3$ عند $x = 2$

الحل/ نجد نقطة التماس وذلك بتعويض قيمة $x = 2$ في الدالة

$Y = (2 - 3)^3 = -1$

نقطة التماس هي $(2 , -1)$

نشتق الدالة ونعوض قيمة $x = 2$ في المشتقة لإيجاد الميل

$f'(x) = 3(x - 3)^2$

$m = f'(2) = 3(2 - 3)^2 = 3$

نعوض نقطة التماس $(2 , -1)$ والميل في معادلة التماس $y - y_1 = m(x - x_1)$

$y + 1 = 3(x - 2)$

$y + 1 = 3x - 6$

$3x - y - 6 - 1 = 0$

معادلة المماس هي $3x - y - 7 = 0$

ميل العمود $= \frac{-1}{3}$

$y + 1 = \frac{-1}{3}(x - 2)$

$3y + 3 = -x + 2$

$x + 3y + 3 - 2 = 0$ ⟹ $x + 3y + 1 = 0$

س٣ / جد معادلة المماس للمنحني الدالة $y = x^3 - 2x + \frac{3}{x^2+2}$ عند $x = -1$

الحل/ نجد نقطة التماس وذلك بتعويض قيمة $x = 2$ في الدالة

$$y = (-1)^3 - 2(-1) + \frac{3}{(-1)^2+2} = -1 + 2 + \frac{3}{1+2} = 1 + 1 = 2$$

نقطة التماس هي $(-1 , 2)$

نشتق الدالة ونعوض قيمة $x = -1$ في المشتقة لايجاد الميل

$$f'(x) = 3x^2 - 2 - \frac{6x}{(x^2+2)^2}$$

$$f'(-1) = 3(-1)^2 - 2 - \frac{6(-1)}{((-1)^2+2)^2} = 3 - 2 + \frac{6}{(3)^2}$$

$$f'(x) = 3 - 2 + \frac{6}{(3)^2} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

نعوض نقطة التماس $(-1 , 2)$ والميل في معادلة التماس $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - 1 = \frac{5}{3}(x - 1)$$

$$3(y - 2) = 5(x + 1)$$

$$3y - 6 = 5x + 5$$

$$5x - 3y + 6 + 5 = 0$$

معادلة المماس هي $5x - 3y + 11 = 0$

==

ملاحظة / لايجاد نقطة تنتمي الى منحني الدالة نتبع الخطوات التالية

١- نجد ميل المستقيم المعلوم حيث ميل المستقيم المعلوم = $\frac{-\text{معامل } X}{\text{معامل } Y}$

٢- اذا كان المستقيم يوازي المماس فان ميل المماس = ميل المستقيم المعلوم

٣- اذا كان المستقيم عمودي على المماس فان ميل المماس = - مقلوب ميل المستقيم المعلوم

٤- نجد المشتقة الاولى للدالة $f'(x)$

٥- نضع ميل المماس = المشتقة اي $f'(x) = m$ ثم نبسط ونجد قيم x

٦- نعوض قيم x في الدالة الاصلية ونجد قيم y ثم نكتب النقط على شكل (x , y)

ملاحظة / اذا كان مماس يوازي محور السينات فان ميله = صفر

مثال١/جد النقط على المنحني $f(x) = x^2 - 4x + 5$ والتي عندها المماس يوازي المستقيم الذي معادلته $y + 2x + 3 = 0$

الحل /

اذا كان المماس يوازي مستقيما معلوما فان ميل المستقيم = ميل المماس ويساوي المشتقة الاولى للدالة

ميل المستقيم المعلوم = $\frac{-\text{معامل } x}{\text{معامل } y} = \frac{-2}{1} = -2$

نجد المشتقة للدالة

$f(x) = x^2 - 4x + 5$

$f'(x) = 2x - 4$

$f'(x) = m = -2$

$2x - 4 = -2 \Longrightarrow 2x = -2 + 4 \Longrightarrow 2x = 2 \Longrightarrow x = 1$

$f(1) = (1)^2 - 4(1) + 5 = 1 - 4 + 5 = 2$

نقطة التماس (1 , 2)

مثال٢/اذا كانت الدالة $f(x) = x^2 + ax + b$ وكان ميل المماس عند $x = -1$ هو 4 وكان المنحني يمر بالنقطة (-3 , 2) جد قيمة b , a

الحل /

$f(x) = x^2 + ax + b$

$f'(x) = 2x + a \Longrightarrow f'(-1) = 4$

$2(-1) + a = 4 \Longrightarrow -2 + a = 4 \Longrightarrow a = 6$

نعوض النقطة (-3 , 2) في الدالة اي $f(-3) = 2$

$(-3)^2 + 6(-3) + b = 2 \Longrightarrow 9 - 18 + b = 2 \Longrightarrow -9 + b = 2 \Longrightarrow b = 11$

س٤/جد النقط على المنحني $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$ بحيث يكون عندها المماس موازيا لمحور السينات

الحل /

المماس يوازي محور السينات اذن ميله = صفر

المشتقة = صفر

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$$

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0$$

نقسم على 3

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x - 3)(x + 1) = 0$$

$$x - 3 = 0 \longrightarrow x = 3$$

$$x + 1 = 0 \longrightarrow x = -1$$

عندما $x = 3$ فان

$$f(3) = (3)^3 - 3(3)^2 - 9(3) + 4 = 27 - 27 - 27 + 4 = -23$$

نقطة التماس (3 , -23)

عندما $x = -1$ فان

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 4 = -1 - 3 - 9 + 4 = -9$$

نقطة التماس (-1 , -9)

نقاط التماس (-1 , -9) , (3 , -23)

==

س٥/جد النقط على المنحني $f(x) = x^2 - 4x + 5$ عندما يكون المماس يوازي المستقيم $2x - y = 0$

الحل /

اذا كان المماس يوازي مستقيما معلوما فان ميل المستقيم = ميل المماس ويساوي المشتقة الاولة للدالة

ميل المستقيم المعلوم $= \frac{-\text{معامل } x}{\text{معامل } y} = \frac{-2}{-1} = 2$

نجد المشتقة للدالة

$$f(x) = x^2 - 4x + 5$$

$$f'(x) = 2x - 4$$

$$f'(x) = 2 \Longrightarrow 2x - 4 = 2 \Longrightarrow 2x = 2 + 4 \Longrightarrow x = 3$$

$$f(3) = (3)^2 - 4(3) + 5 = 9 - 12 + 5 = 2$$

نقطة التماس (3 , 2)

التطبيقات الفيزياوية

١- الزمن ويرمز له بالرمز t

٢- الإزاحة (البعد او الموضع) ويرمز لها بالرمز s(t)

٣- السرعة ويرمز لها بالرمز v(t)

٤- التعجيل ويرمز له بالرمز a(t)

القوانين المستخدمة

١- السرعة = مشتقة الإزاحة ونعبر عن ذلك $v(t) = s'(t)$

٢- التعجيل = مشتقة السرعة ونعبر عن ذلك $a(t) = v'(t)$

مثال١ / جسم يتحرك على خط مستقيم وفق القاعدة $s(t) = t^3 + 3t^2 + 4t + 1$ حيث s(t) تقاس بالأمتار والزمن بالدقائق جد موضعه وسرعته وتعجيله بعد (5) دقائق بدأ الحركة .

الحل/

$$s(5) = (5)^3 + 3(5)^2 + 4(5) + 1 = 125 + 75 + 20 + 1 = 221m$$

$$v(t) = s'(t) = 3t^2 + 6t + 4$$

$$v(5) = 3(5)^2 + 6(5) + 4 = 75 + 30 + 4 = 109$$

$$a(t) = v'(t) = 6t + 6$$

$$a(5) = 6(5) + 6 = 36$$

مثال٢ / يتحرك جسم على خط مستقيم وفق القاعدة $s(t) = t^2 - 20t + 120$ حيث يقاس البعد بالكيلو مترات والزمن بالساعة جد

١- سرعته بعد خمس ساعات .

٢- بُعده عندما تصبح سرعته صفرا .

الحل/

$$1\text{-}\ v(t) = s'(t) = 2t - 20$$

$$v(5) = 2(5) - 20 = 10 - 20 = -10$$

٢- بُعده عندما تصبح سرعته صفرا

$$v(t) = 0 \Longrightarrow 2t - 20 = 0 \Longrightarrow 2t = 20 \Longrightarrow t = 10$$

نعوض $t = 10$

$$s(10) = 10^2 - 20(10) + 120 = 100 - 200 + 120 = 20$$

مثال٣ / جسم يتحرك على خط مستقيم وحسب العلاقة $s(t) = \sqrt{2t+1}$ اوجد الزمن الذي يستغرقه حتى تصبح سرعته 1/3 متر/ثا .

الحل/

$$v(t) = s^{/}(t) = \frac{2}{2\sqrt{2t+1}} = \frac{1}{\sqrt{2t+1}}$$

$$v(t) = \frac{1}{3} \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2t+1}} = \frac{1}{3}$$

$$\sqrt{2t+1} = 3$$

$2t + 1 = 9$ *تربيع الطرفين*

$2t = 9 - 1 \Longrightarrow 2t = 8 \Longrightarrow t = 4$

==

مثال٤ / اذا تحرك جسم وفق العلاقة $s(t) = t^3 - 6t^2 + 18t + 12$ حيث s(t) تقاس بالأمتار والزمن بالثواني احسب بُعد الجسم عن نقطة بداية الحركة وسرعته عندما يصبح تعجيل صفرا ..

الحل/

$v(t) = s^{/}(t) = 3t^2 - 12t + 18$

التعجيل= صفر

$a(t) = v^{/}(t) = 6t - 12$

$6t - 12 = 0 \Longrightarrow 6t = 12 \Longrightarrow t = 2$

$s(2) = (2)^3 - 6(2)^2 + 18(2) + 12 = 8 - 24 + 36 + 12 = -16 + 48 = 32$

$v(2) = 3(2)^2 - 12(2) + 18 = 12 - 24 + 18 = 6$

==

مثال5/قذف جسم نحو الأعلى عن سطح الأرض بإزاحة معطاة وفق العلاقة $s(t) = 96t - 16t^2$ حيث ان الإزاحة s(t) بالأمتار t بالثواني احسب

١ ـ سرعة الجسم بعد ثانيتين ٢ ـ متى تصبح سرعته صفراً .

$1- V(t) = s^{/}(t) = 96 - 32t$

$V(2) = 96 - 32(2) = 96 - 64 = 32$

٢ ـ عندما تصبح سرعته = صفر

$2- V(t) = 0 \longrightarrow 96 - 32t = 0$

$32t = 96 \longrightarrow t = 3$

س٦ / جسم يتحرك على خط مستقيم بحيث بُعده بالأمتار والزمن بالثواني ومعطى العلاقة $s(t) = \sqrt{2t^2 + 18}$ احسب بعده عندما تصبح سرعته 1 متر/ثا .

الحل/

$$v(t) = s'(t) = \frac{4t}{2\sqrt{2t^2+18}} = \frac{2t}{\sqrt{2t^2+18}}$$

$$v(t) = 1 \Longrightarrow \frac{2t}{\sqrt{2t^2+18}} = 1$$

$$\sqrt{2t^2 + 18} = 2t$$

تربيع الطرفين

$$2t^2 + 18 = 4t^2$$

$$4t^2 - 2t^2 = 18 \Longrightarrow 2t^2 = 18 \Longrightarrow t^2 = 9 \Longrightarrow t = 3$$

$$s(3) = \sqrt{2(3)^2 + 18} = \sqrt{18 + 18} = \sqrt{36} = 6$$

==

س٧ / اذا تحرك جسم وفق العلاقة $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t + 7$ حيث s(t) تقاس بالأمتار والزمن بالثواني احسب

١- بُعده الجسم من نقطة بداية الحركة عندما تصبح سرعته صفرا ..

٢- بُعده الجسم من نقطة بداية الحركة عندما يصبح تعجيل صفرا ..

الحل/

$$v(t) = s'(t) = 3t^2 - 12t + 9$$

السرعة = صفر

$$v(t) = 0 \Longrightarrow 3t^2 - 12t + 9 = 0$$

$$t^2 - 4t + 3 = 0$$

$$(t-3)(t-1) = 0$$

$$t - 3 = 0 \Longrightarrow t = 3$$

$$t - 1 = 0 \Longrightarrow t = 1$$

عندما $t = 3$ فان

$$s(t) = (3)^3 - 6(3)^2 + 9(3) + 7 = 27 - 54 + 27 + 7 = 7$$

عندما $t = 1$ فان

$$s(t) = (1)^3 - 6(1)^2 + 9(1) + 7 = 1 - 6 + 9 + 7 = 11$$

التعجيل= صفر

$$a(t) = v'(t) = 6t - 12$$

$$6t - 12 = 0 \Longrightarrow 6t = 12 \Longrightarrow t = 2$$

$$s(2) = (2)^3 - 6(2)^2 + 9(2) + 7 = 8 - 24 + 18 + 7 = 9$$

التطبيق الاقتصادي للمشتقة

١ ـ نرمز للدالة الكلفة الكلية بالرمز $C(x)$ حيث x يمثل حجم الإنتاج

٢ ـ نرمز للدالة الكلفة الحدية بالرمز MC حيث $MC = c^{/}(x)$

٣ ـ نرمز معدل الكلفة بالرمز AC ونحصل عليها من $AC = \frac{C(x)}{x}$

٤ ـ معدل الكلفة الحدية = مشتقة معدل الكلفة $\frac{d}{dx}(AC)$

مثال / لنفرض ان دالة الكلفة الكلية لانتاج سلعة ما $C(x) = 3x^2 - 60x + 1200$ جد

١ ـ دالة الكلفة الحدية ٢ ـ دالة معدل الكلفة

٣ ـ دالة معدل الكلفة الحدية ٤ ـ حجم الإنتاج الذي يعطي اقل معدل كلفة الكلية

الحل/

$C(x) = 3x^2 - 60x + 1200$

1) $MC = C'(x) = 6x - 60$

2) $AC = \frac{C(x)}{x} = \frac{3x^2-60x+1200}{x} = 3x - 60 + \frac{1200}{x}$

3) $\frac{d}{dx}AC = 3 + \frac{-1200}{x^2} = 3 - \frac{1200}{x^2}$

لإيجاد حجم الإنتاج الذي يعطي اقل معدل كلفة نجعل المشتقة الأولى لـ AC صفرا

$3 - \frac{1200}{x^2} = 0$

ضرب طرفي المعادلة في x^2

$3x^2 - 1200 = 0 \Longrightarrow 3x^2 = 1200$

$x^2 = 400 \Longrightarrow x = 20$

الكلفة الكلية

$C(x) = 3(20)^2 - 60(20) + 1200 = 1200 - 1200 + 1200 = 1200$

س٨/ لنفرض ان الكلية لصنع x من وحدات سلعة ماهي $c(x) = 1500 + 30x + \frac{20}{x}$
جد الكلفة الحدية عندما يكون عدد الوحدات المصنوعة 50

الحل /

الكلفة الكلية $c(x) = 1500 + 30x + \frac{20}{x}$

$$MC = c'(x) = 0 + 30 - \frac{20}{x^2}$$

$MC = 30 - \frac{20}{x^2}$ *دالة الكلفة الحدية*

لايجاد الكلفة الحدية عندما يكون عدد الوحدات = 50

$$MC = c'(50) = 30 - \frac{20}{(50)^2} = 30 - \frac{20}{2500}$$

$$= 30 - \frac{1}{125} = \frac{3750}{125} - \frac{1}{125} = \frac{3749}{125} = 29,992$$

س٩ / لتكن دالة الكلفة الكلية $C(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 5$ جد

١ ـ دالة الكلفة الحدية *٢ ـ دالة معدل الكلفة الكلية*

الحل

$C(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 5$

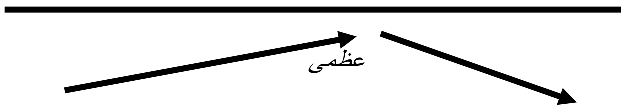
$MC = c'(x) = x - 2$ دالة الكلفة الحدية

$$AC = \frac{C(x)}{x} = \frac{\frac{1}{2}x^2 - 2x + 5}{x} = \frac{1}{2}x - 2 + \frac{5}{x}$$

النقطة الحرجة ومناطق التزايد والتناقص والنهايات العظمى والصغرى

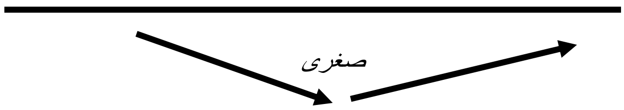
١- نجد المشتقة الاولى
٢- نجعل المشتقة = صفراً ونجد قيم x
٣- نعوض قيمة x في الدالة الاصلية ونجد قيمة y والنقطة (x, y) تمثل نقطة حرجة
٤- نضع قيم x على خط الاعداد
٥- نأخذ قيمة اكبر واصغر من x ونعوضها في المشتقة $f'(x)$
٦- اذا كانت اشارة $f'(x)$ الموجبة تمثل مناطق التزايد واذا كانت $f'(x)$ سالبة تمثل مناطق التناقص
٧- اذا كانت الدالة متزايد قبل النقطة الحرجة ومتناقصة بعد النقطة الحرجة فالنقطة نهاية عظمى

اشارة $f'(x)$ + + + + +   a   - - - - - -



٨- اذا كانت الدالة متناقصة قبل النقطة الحرجة و متزايد بعد النقطة الحرجة فالنقطة صغرى

اشارة $f'(x)$ - - - - - -   a   + + + + + + +



مثال١ / جد النقاط الحرجة ومناطق التزايد والتناقص للدالة $F(x) = x^2 - 4x + 3$

الحل/ ١- نجد المشتقة

$F'(x) = 2x - 4$

٢- نجعل المشتقة = صفر

$2x - 4 = 0$

$2x = 4 \Longrightarrow x = 2$

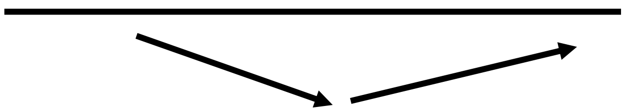
٣- نعوض قيمة x في الدالة الاصلية ونجد قيمة y والنقطة (x, y) تمثل نقطة حرجة

$F(2) = (2)^2 - 4(2) + 3 = 4 - 8 + 3 = -1$

النقطة (2 , -1) نقطة حرجة

٤- نضع قيم x على خط الاعداد

اشارة $f'(x)$ - - - - - -   2   + + + + + + +



الدالة متزايدة في $\{x : x > 2\}$

الدالة متناقصة في $\{x : x < 2\}$

مثال٢ / جد النقاط الحرجة ومناطق التزايد والتناقص للدالة $F(x) = x^3 - 3x + 6$

الحل/ ١ - نجد المشتقة

$F'(x) = 3x^2 - 3$

٢ - نجعل المشتقة = صفر

$3x^2 - 3 = 0$

$3x^2 = 3 \Longrightarrow x^2 = 1 \Longrightarrow x = \mp 1$

٣ - نعوض قيمة x في الدالة الاصلية ونجد قيمة y والنقطة (x, y) تمثل نقطة حرجة

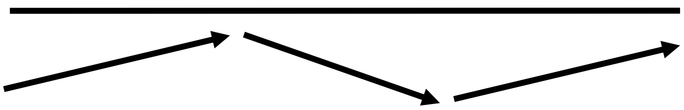
$F(1) = (1)^3 - 3(1) + 6 = 1 - 3 + 6 = 4$

$F(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 6 = -1 + 3 + 6 = 8$

النقاط الحرجة هي $(1, 4)$, $(-1 , 8)$

٤ - نضع قيم x على خط الاعداد

أشارة $f'(x)$　　+ + + + -1 - - - - - 1 + + + + + + +



الدالة متزايدة في $\{x : x > 1\}$

الدالة متزايدة في $\{x : x < -1\}$

الدالة متناقصة في $(-1 , 1)$

مثال٣ / جد النقاط الحرجة ومناطق التزايد والتناقص للدالة $F(x) = (2 - x)^3$

الحل/ ١ - نجد المشتقة

$F'(x) = 3(2 - x)^2(-1) = -3(2 - x)^2$

٢ - نجعل المشتقة = صفر

$-3(2 - x)^2 = 0$

$(2 - x)^2 = 0$

$2 - x = 0 \longrightarrow x = 2$

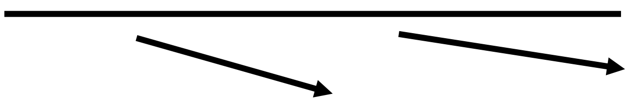
٣ - نعوض قيمة x في الدالة الاصلية ونجد قيمة y والنقطة (x, y) تمثل نقطة حرجة

$F(2) = (2 - 2)^3 = 0$

النقطة $(2 , 0)$ نقطة حرجة

٤ - نضع قيم x على خط الاعداد

اشارة $f'(x)$　　- - - - - - 2 - - - - - - - - - -



الدالة متناقصة في $\{x : x > 2\}$

الدالة متناقصة في $\{x : x < 2\}$

مثال / جد النقاط النهايات العظمى والصغرى ان وجدت للدالة $F(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$

الحل/ ١ ـ نجد المشتقة

$F'(x) = 3x^2 - 6x - 9$

٢ـ نجعل المشتقة = صفر

$3x^2 - 6x - 9 = 0$

نقسم المعادلة على 3

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$(x - 3)(x + 1) = 0$

$x - 3 = 0 \longrightarrow x = 3$

$x + 1 = 0 \longrightarrow x = -1$

٣ ـ نعوض قيمة x في الدالة الاصلية ونجد قيمة y والنقطة (x, y) تمثل نقطة حرجة

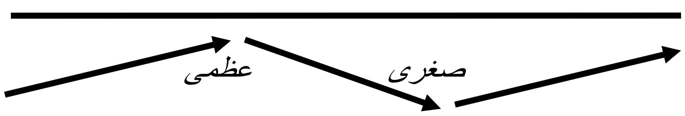
$F(3) = (3)^3 - 3(3)^2 - 9(3) + 7 = 27 - 27 - 27 + 7 = -20$

$F(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 7 = -1 - 3 + 9 + 7 = 12$

النقاط الحرجة هي $(3, -20)$, $(-1, 12)$

٤ ـ نضع قيم x على خط الاعداد

أشارة $f'(x)$ $+ + + + \ {}^{-}1 - - - - - \ 3 \ + + + + + + +$



الدالة متزايدة في $\{x : x > 3\}$ و *الدالة متزايدة في* $\{x : x < -1\}$

الدالة متناقصة في $(-1, 3)$

نقطة نهاية صغرى $(3, -20)$ *نقطة نهاية عظمى* $(-1, 12)$

مثال / جد النقاط النهايات العظمى والصغرى ان وجدت للدالة $F(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

الحل/ ١ ـ نجد المشتقة

$F'(x) = 4x^3 - 4x$

٢ـ نجعل المشتقة = صفر

$4x^3 - 4x = 0$

$4x(x^2 - 1) = 0$

$4x(x - 1)(x + 1) = 0$

$4x = 0 \longrightarrow x = 0$

$x - 1 = 0 \longrightarrow x = 1$

$x + 1 = 0 \longrightarrow x = -1$

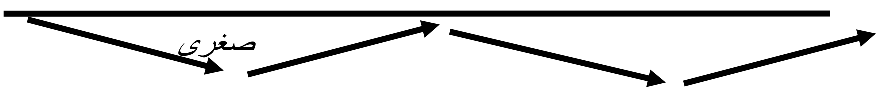
$f(0) = 0^4 - 2(0)^2 + 1 = 1$

$f(1) = 1^4 - 2(1)^2 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$

$f(-1) = (-1)^4 - 2(-1)^2 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$

النقاط الحرجة هي $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(1, 0)$

أشارة $f'(x)$ $- - - - - - \ {}^{-}1 + + + + \ 0 \ - - - - - - \ 1 \ + + + +$



نقطة نهاية صغرى $(-1, 0)$, $(1,0)$ *نقطة نهاية عظمى* $(0, 1)$

مثال / جد النقاط النهايات العظمى والصغرى ان وجدت للدالة $F(x) = x^3 (-4 + x)$

الحل / $F(x) = -4x^3 + x^4$

١ ـ نجد المشتقة

$F'(x) = -12x^2 + 4x^3$

٢ـ نجعل المشتقة = صفر

$-12x^2 + 4x^3 = 0$

$4x^2(-3 + x) = 0$

$4x^2 = 0 \Longrightarrow x = 0$

$-3 + x = 0 \Longrightarrow x = 3$

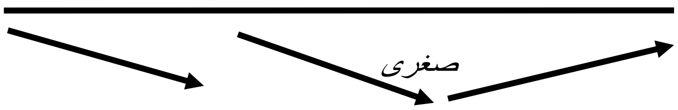
$f(0) = (0)^3 (-4 + 3) = 0$

$f(3) = (3)^3 (-4 + 3) = -27$

النقاط الحرجة هي $(0, 0)$, $(3, -27)$

ـ نضع قيم x على خط الاعداد

أشارة $f'(x)$ - - - - - -   0 - - - - - -   3   + + + + + +



نقطة نهاية صغرى $(3, -27)$ نقطة $(0, 0)$ نقطة حرجة وليست نهاية

الدالة لا تمتلك نهاية عظمى

ملاحظات / لإيجاد الثوابت مثل a , b

١ - اذا أعطيت لنا في السؤال إحداثيات نقطة حرجة او نهاية عظمى او صغرى مثل (a , b)

نستخدم هذه النقطة مرتين مرة الاولى هي $f(a) = b$ المرة الثانية $f'(a) = 0$

٢- اذا كان للدالة نهاية محلية عند النقطة $x = a$ فان $f'(a) = 0$

مثال / اذا كانت $f(x) = x^3 + ax + 5$ لها نقطة نهاية محلية عند $x = 1$ جد قيمة a وبين نوع النهاية

الحل/ نشتق الدالة

$f'(x) = 3x^2 + a$

$f'(1) = 0 \longrightarrow 3(1)^2 + a = 0 \longrightarrow 3 + a = 0 \longrightarrow a = -3$

نعوض قيمة $a = -3$ في الدالة الاصلية

$f(x) = x^3 - 3x + 5$

$f'(x) = 3x^2 - 3$

2 - نجعل المشتقة = صفر

$3x^2 - 3 = 0$

$3x^2 = 3 \longrightarrow x^2 = 1 \longrightarrow x = \mp 1$

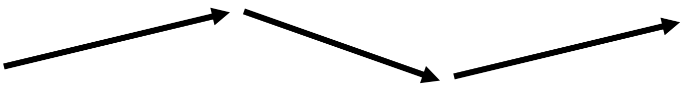
3- نعوض قيمة x في الدالة الاصلية ونجد قيمة y والنقطة (x, y) تمثل نقطة حرجة

$f(1) = (1)^3 - 3(1) + 5 = 1 - 3 + 5 = 3$

$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 5 = -1 + 3 + 5 = 7$

النقاط الحرجة هي $(1, 3) , (-1 , 7)$

أشارة $f'(x)$ + + + + -1 - - - - - 1 + + + + + +



النقطة $(1, 3)$ نهاية صغرى محلية

مثال / اذا كانت $f(x) = ax^3 + bx$ وكانت f(x) تمتلك نهاية محلية عند النقطة (1 ,-2)
فما قيمة a , b وما نوع هذه النهاية ؟
الحل /

$$f'(x) = 3ax^2 + b$$

نعوض قيمة x= 1 في المشتقة

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow 3a(1)^2 + b = 0$$

$$3a + b = 0 \quad \cdots\cdots\cdots (1)$$

النقطة (1 , -2) تحقق معادلة الدالة f(x)

$$-2 = a(1)^3 + b(1) \Longrightarrow -2 = a + b \quad \cdots\cdots\cdots (2)$$

$$3a + b = 0 \quad \cdots\cdots\cdots (1)$$
$$a + b = -2 \quad \cdots\cdots\cdots (2)$$

بالطرح

$$2a = 2 \Longrightarrow a = 1$$

نعوض قيمة a= 1 في معادلة 2

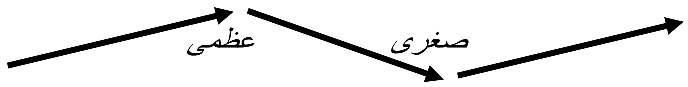
$$1 + b = -2 \Longrightarrow b = -2 - 1 \Longrightarrow b = -3$$

تصبح المعادلة الدالة f(x)

$$f(x) = x^3 - 3x$$
$$f'(x) = 3x^2 - 3$$
$$f'(x) = 0 \Longrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Longrightarrow x^2 = 1 \Longrightarrow x = \mp 1$$

٤ - نضع قيم x على خط الاعداد

أشارة f '(x)   + + + + -1 - - - - - 1 + + + + + +



الدالة متزايدة في {x : x > 1} و الدالة متزايدة في {x : x < -1}
الدالة متناقصة في (-1 , 1)
نقطة نهاية صغرى (1 , -2)

س٢/اذا علمت ان النقطة (2,1) هي نقطة النهاية الصغرى المحلية للدالة $f(x) = a + (x - b)^2$ فجد قيمة كل من a , b

الحل/ نشتق الدالة

$$f(x) = 0 + 2(x - b)(1) = 2(x - b)$$

$$f'(2) = 0 \Longrightarrow 2(2 - b) = 0 \Longrightarrow 2 - b = 0 \Longrightarrow b = 2$$

نعوض قيمة $b = 2$ في الدالة الاصلية

$$f(x) = a + (x - 2)^2$$

النقطة تحقق معادلة الدالة $f(x)$ اي

$$f(2) = 1 \Longrightarrow a + (2 - 2)^2 = 1 \Longrightarrow a + 0 = 1 \Longrightarrow a = 1$$

==

مثال / اذا كانت النقطة (1 , 4) نقطة حرجة للدالة $f(x) = 3 + ax + bx^2$ جد قيمة a , b

وبين نوع النقطة الحرجة

الحل / نجد المشتقة الاولى للدالة

$$f'(x) = a + 2bx$$

$$f'(1) = 0 \Longrightarrow a + 2b(1) = 0$$

$$a + 2b = 0 \quad \text{--------} (1)$$

النقطة (1 , 4) تحقق معادلة الدالة $f(x)$

$$f(1) = 4 \Longrightarrow 3 + a(1) + b(1)^2 = 4 \Longrightarrow 3 + a + b = 4$$

$$3 + a + b = 4 - 3 \Longrightarrow a + b = 1 \quad \text{--------}(2)$$

بحل المعادلتين انيا

$$a + 2b = 0 \quad \text{--------} (1)$$

$$a + b = 1 \quad \text{--------}(2)$$

بالطرح

$$b = -1$$

نعوض قيمة في معادلة رقم 2

$$a + (-1) = 1 \Longrightarrow a = 1 + 1 = 2$$

لمعرفة نوع النقطة الحرجة

$$f(x) = 3 + 2x - x^2$$

$$f'(x) = 2 - 2x$$

$$2 - 2x = 0 \Longrightarrow 2x = 2 \Longrightarrow x = 1$$

اشارة $f'(x)$　　+ + + + +　1　- - - - - -

عظمى

النقطة (1 , 4) نهاية عظمى محلية

التقعر و التحدب و نقاط الانقلاب

لايجاد التقعر والتحدب ونقاط الانقلاب نتبع الخطوات التالية

١- نجد المشتقة الثانية للدالة
٢- نجعل المشتقة الثانية = صفراً ونجد قيم x
٣- نعوض قيمة x في الدالة الاصلية ونجد قيمة y والنقطة (x, y) تمثل نقطة انقلاب
٤- نضع قيم x على خط الاعداد
٥- نأخذ قيمة اكبر واصغر من x ونعوضها في المشتقة $f''(x)$
٦- اذا كانت اشارة $f''(x)$ الموجبة تمثل منطقة تقعر واذا كانت $f''(x)$ سالبة تمثل منطقة تحدب

==

مثال / جد النقاط الانقلاب ومناطق التحدب والتقعر للدالة $f(x) = x^2 - 4x + 2$

الحل /

$f'(x) = 2x - 4$
$f''(x) = 2$

لا توجد نقاط انقلاب لان المنحني مقعر فقط

==

مثال / جد النقاط الانقلاب ومناطق التحدب والتقعر للدالة $F(x) = x^3 - 3x + 2$

الحل /

١- نجد المشتقة الثانية

$f'(x) = 3x^2 - 3$
$f''(x) = 6x$

٢- نجعل المشتقة الثانية = صفر $6x = 0 \Longrightarrow x = 0$

نعوض قيم x في الدالة الاصلية

$f(0) = (0)^3 - 3(0) + 2 = 2$

أشارة $f''(x)$ - - - - - - 0 + + + + + +



تحدب تقعر

الدالة مقعرة في $\{x : x > 0\}$
الدالة محدبة في $\{x : x < 0\}$
نقطة الانقلاب هي $(0, 2)$

س١ / جد النقاط الانقلاب ومناطق التحدب والتقعر للدالة $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$

الحل /

$f'(x) = 2x - 4$

$f''(x) = 2$

لا توجد نقاط انقلاب لان المنحني مقعر فقط

==

س٢ / جد النقاط الانقلاب ومناطق التحدب والتقعر للدالة $f(x) = 3x - x^3$

الحل /

١ - نجد المشتقة الثانية

$f'(x) = 3 - 3x^2$

$f''(x) = -6x$

٢ - نجعل المشتقة الثانية = صفر

$-6x = 0 \Longrightarrow x = 0$

نعوض قيم x في الدالة الاصلية

$f(0) = 3(0) - (0)^3 = 0$

أشارة $f''(x)$ + + + + + + 0 - - - - - - -



الدالة محدبة في $\{x : x > 0\}$

الدالة مقعرة في $\{x : x < 0\}$

نقطة الانقلاب هي $(0 , 0)$

==

س٣/ جد النقاط الانقلاب ومناطق التحدب والتقعر للدالة $f(x) = x^3 - 3x^2$

الحل /

١ - نجد المشتقة الثانية

$f'(x) = 3x^2 - 6x$

$f''(x) = 6x - 6$

٢ - نجعل المشتقة الثانية = صفر

$6x - 6 = 0 \Longrightarrow 6x = 6 \Longrightarrow x = 1$

نعوض قيم x في الدالة الاصلية

$f(1) = (1)^3 - 3(1)^2 = 1 - 3 = -2$

أشارة $f''(x)$ - - - - - - 1 + + + + + +



الدالة مقعرة في $\{x : x > 1\}$

الدالة محدبة في $\{x : x < 1\}$

نقطة الانقلاب هي $(0 , -2)$

س٤ / جد النقاط الانقلاب ومناطق التحدب والتقعر للدالة $f(x) = x^5$

الحل /

١ ـ نجد المشتقة الثانية

$f'(x) = 5x^4$

$f''(x) = 20x^3$

٢ ـ نجعل المشتقة الثانية = صفر　　$20x^3 = 0 \Longrightarrow x = 0$

نعوض قيم x في الدالة الاصلية

$f(0) = (0)^5 = 0$

أشارة $f''(x)$　　- - - - - -　0　+ + + + + +



تحدب　　تقعر

الدالة مقعرة في $\{x : x > 0\}$

الدالة محدبة في $\{x : x < 0\}$

نقطة الانقلاب هي $(0 , 0)$

==

س٥ / جد النقاط الانقلاب ومناطق التحدب والتقعر للدالة $f(x) = (x - 2)^3 + 3$

الحل /

١ ـ نجد المشتقة الثانية

$f'(x) = 3(x-2)^2 (1)$

$f''(x) = 6(x - 2)$

٢ ـ نجعل المشتقة الثانية = صفر　　$6(x - 2) = 0 \Longrightarrow x - 2 = 0 \Longrightarrow x = 2$

نعوض قيم x في الدالة الاصلية

$f(2) = (2 - 2)^3 + 3 = 0 + 3 = 3$

أشارة $f''(x)$　　- - - - - -　2　+ + + + + +



تحدب　　تقعر

الدالة مقعرة في $\{x : x > 2\}$

الدالة محدبة في $\{x : x < 2\}$

نقطة الانقلاب هي $(0 , 3)$

س٦ / جد النقاط الانقلاب ومناطق التحدب والتقعر للدالة $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x^2$

الحل /

١- نجد المشتقة الثانية

$f'(x) = x^3 - 3x$

$f''(x) = 3x^2 - 3$

٢- نجعل المشتقة الثانية = صفر

$3x^2 - 3 = 0 \Longrightarrow 3x^2 = 3 \Longrightarrow x^2 = 1 \Longrightarrow x = \mp 1$

نعوض قيم x في الدالة الاصلية

$f(1) = \frac{1}{4}(1)^4 - \frac{3}{2}(1)^2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{2} = \frac{1-6}{4} = \frac{-5}{4}$

$f(1) = \frac{1}{4}(-1)^4 - \frac{3}{2}(-1)^2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{2} = \frac{1-6}{4} = \frac{-5}{4}$

أشارة $f''(x)$　　+ + + + + + -1 - - - - - - 1 + + + + +



الدالة مقعرة في $\{x : x > 1\}$ و $\{x : x < -1\}$

الدالة محدبة في $(-1 , 1)$

نقطة الانقلاب هي $(-1 ,\quad) , (1 ,\quad)$

==

س٧ / جد النقاط الانقلاب ومناطق التحدب والتقعر للدالة $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$

الحل /

١- نجد المشتقة الثانية

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$

$f''(x) = 6x - 6$

٢- نجعل المشتقة الثانية = صفر

$6x - 6 = 0 \Longrightarrow 6x = 6 \Longrightarrow x = 1$

نعوض قيم x في الدالة الاصلية

$f(1) = (1)^3 - 3(1)^2 + 3(1) + 1 = 1 - 3 + 3 + 1 = 2$

أشارة $f''(x)$　　- - - - - - 1 + + + + + +



الدالة مقعرة في $\{x : x > 1\}$

الدالة محدبة في $\{x : x < 1\}$

نقطة الانقلاب هي $(0 , 2)$

رسم الدوال

رسم المخطط البياني للدالة

١- نقاط تقاطع المحورين وذلك

أ- نجعل $x = 0$ ونجد قيم y

ب- نجعل $y = 0$ ونجد قيم x

٢- نشتق الدالة ونجد مناطق التزايد والتناقص والنقاط الحرجة ونوعها (عظمى او صغرى)

٣- نجد المشتقة الثانية ونجد مناطق التقعر والتحدب ونقطة الانقلاب ان وجدت

٤- نجد نقاط اضافية ان احتجنا الى ذلك

٥- نعين النقاط (التقاطع والحرجة والانقلاب) بالمستوى الاحداثي

مثال ١ / ارسم منحني الدالة $f(x) = x^2 + 4x + 3$

الحل /

١ - التقاطع مع المحورين

نجعل $x = 0$ ونجد قيم y $\quad y = f(0) = 0^2 + 4(0) + 3 = 3$

نقطة التقاطع $(0 , 3)$ مع محور الصادات

نجعل $y = 0$ ونجد قيم x $\quad x^2 + 4x + 3 = 0$

$(x + 3)(x + 1) = 0$

$x + 3 = 0 \qquad x = -3$

$x + 1 = 0 \qquad x = -1$

نقاط التاطع $(-1 , 0)$, $(-3 , 0)$ مع محور السينات

٢- نجد النهايات العظمى والصغرى $\quad f'(x) = 2x + 4$

$2x + 4 = 0 \qquad 2x = -4 \qquad x = -2$

$f(-2) = (-2)^2 + 4(-2) + 3 = 4 – 8 + 3 = -1$

نقطة$(-2 , -1)$ حرجة

٤- نضع قيم x على خط الاعداد

اشارة $f'(x)$ $\qquad$ - - - - - - $\quad -2 \quad$ + + + + + + + +

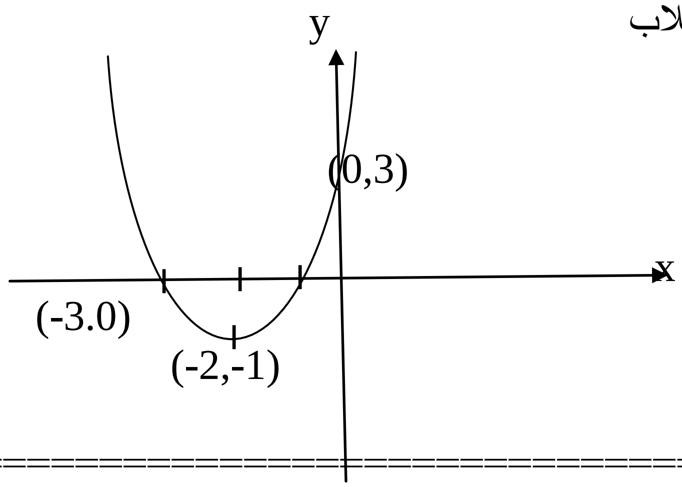
↘ ↗

الدالة متزايدة في $\{x : x > -2\}$ $\qquad$ الدالة متناقصة في $\{x : x < -2\}$

نقطة$(-2 , -1)$ نهاية صغرى محلية

٣- نجد المشتقة الثانية $f^{//}(x) = 2$

الدالة مقعرة فقط ولا توجد نقاط انقلاب



==

مثال٢ / ارسم منحني الدالة $F(x) = x^3 - 3x$

الحل /

١ - التقاطع مع المحورين

نجعل $x = 0$ ونجد قيم y $\quad y = f(0) = 0^3 - 3(0) = 0$

نقطة التقاطع (0 , 0) مع محور الصادات

نجعل $y = 0$ ونجد قيم x $\quad x^3 - 3x = 0$

$x(x^2 - 3) = 0$

$x = 0$

$x^2 - 3 = 0 \Longrightarrow x^2 = 3 \Longrightarrow x = \mp\sqrt{3}$

نقاط التاطع $(\sqrt{3}, 0)$, $(-\sqrt{3}, 0)$ مع محور السينات

٢- نجد النهايات العظمى والصغرى $f^{/}(x) = 3x^2 - 3$

$3x^2 - 3 = 0 \Longrightarrow 3x^2 = 3 \Longrightarrow x^2 = 1 \Longrightarrow x = \mp 1$

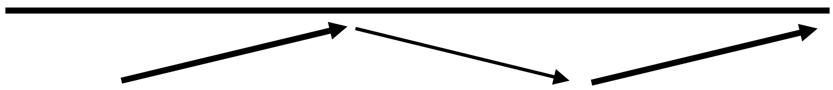
$f(1) = (1)^3 - 3(1) = 1 - 3 = -2$

$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = -1 + 3 = 2$

نقطة$(2, -1)$, $(-2, 1)$ حرجة

٤- نضع قيم x على خط الاعداد

أشارة $f'(x)$ $\quad$ + + + + + + -1 - - - - - - 1 + + + + +



الدالة متزايدة في $\{x : x > 1\}$ و متزايدة في $\{x : x < -1\}$

الدالة متناقصة في الفترة $(-1, 1)$

نقطة$(2, -1)$ نهاية عظمى محلية

نقطة$(-2, 1)$ نهاية صغرى محلية

٣- نجد المشتقة الثانية

$f''(x) = 6x$

نجعل المشتقة الثانية = صفر

$6x = 0 \Longrightarrow x = 0$

نعوض قيم x في الدالة الاصلية

$f(0) = (0)^3 - 3(0) + 2 = 2$

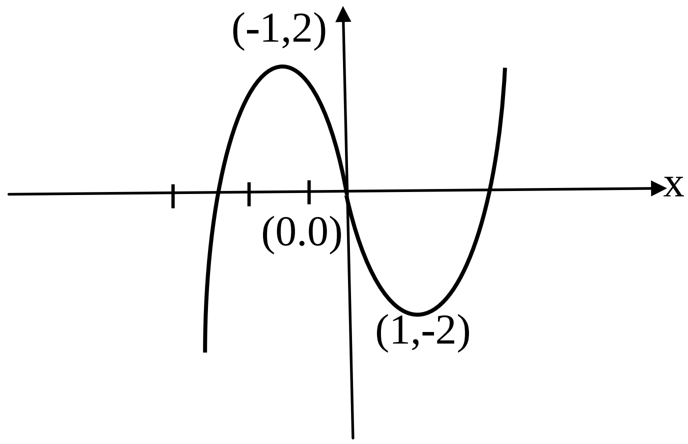
أشارة $f''(x)$ - - - - - -   0   + + + +   + +



الدالة مقعرة في $\{x : x > 0\}$

الدالة محدبة في $\{x : x < 0\}$

نقطة الانقلاب هي $(0 , 2)$



مثال / بالاستعانة بالتفاضل ارسم منحني الدالة $F(x) = (x + 1)^3 - 1$

الحل / ١ - التقاطع مع المحورين

نجعل $x = 0$ ونجد قيم y $\quad y = f(0) = (0+1)^3 -1 = 1 - 1 = 0$

نقطة التقاطع (0 , -1) مع محور الصادات

نجعل $y = 0$ ونجد قيم x $\quad (x - 1)^3 - 1 = 0$

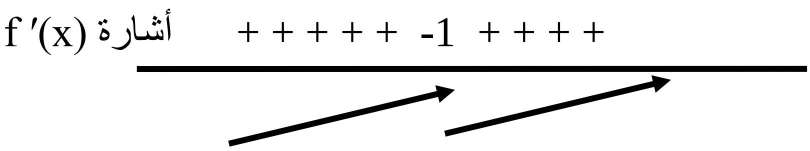
$(x + 1)^3 = 1 \Rightarrow x + 1 = 1 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0,0)$

٢- نجد النهايات العظمى والصغرى $\quad f'(x) = 3(x + 1)^2$

$3 (x + 1)^2 = 0 \Rightarrow (x + 1)^2 = 0 \Rightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

$f (1) = (-1 +1)^3 - 1 = 0 - 1 = -1$

نقطة (-1 , -1) حرجة



الدالة متزايدة في مجالها $\{x : x < 1 \}, \{ x : x > 1\}$

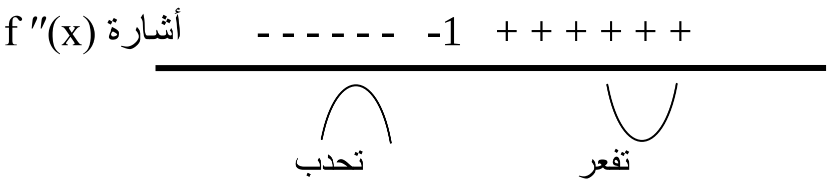
نقطة (-1 , -1) مجرد حرجة

٣- نجد المشتقة الثانية $\quad f''(x) = 6(x + 1)$

٢- نجعل المشتقة الثانية = صفر $\quad 6(x + 1) = 0 \Rightarrow x +1 = 0 \Rightarrow x = -1$

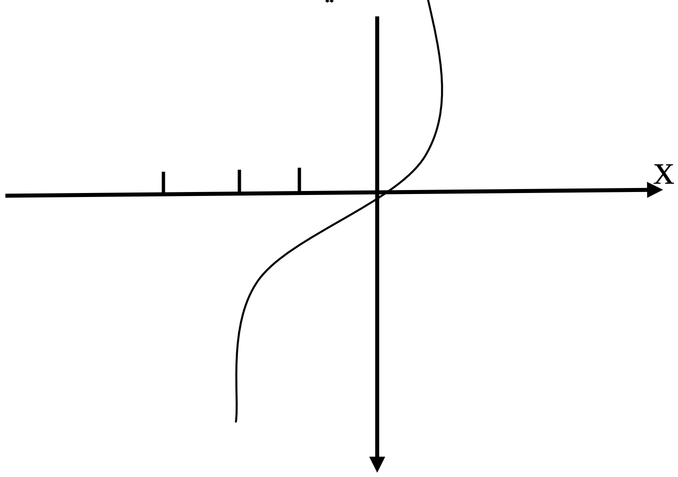
نعوض قيم x في الدالة الاصلية

$f (-1) = (-1 + 1)^3 - 1 = 0 - 1 = -1$



الدالة مقعرة في $\{x : x > -1 \}$ الدالة محدبة في $\{x : x < -1 \}$

نقطة الانقلاب هي $(-1 , -1)$



الأستاذ عبدالسلام محمد

س١ / بالاستعانة بالتفاضل ارسم منحني الدالة $F(x) = 4 - 6x - x^2$

الحل /

١ - التقاطع مع المحورين

نجعل $x = 0$ ونجد قيم y $\quad y = f(0) = 4 - 6(0) - 0^2 = 4$

نقطة التقاطع (0 , 4) مع محور الصادات

نجعل $y = 0$ ونجد قيم x $\quad 4 - 6x - x^2 = 0$

ليس ضروريا لان المعادلة تحل بالدستور

٢- نجد النهايات العظمى والصغرى $\quad f'(x) = -6 - 2x$

$$-6 - 2x = 0 \Longrightarrow 2x = -6 \Longrightarrow x = -3$$

$$f(-3) = 4 - 6(-3) - (-3)^2 = 4 + 18 - 9 = 13$$

نقطة(13 , 3 -) حرجة

٤- نضع قيم x على خط الاعداد

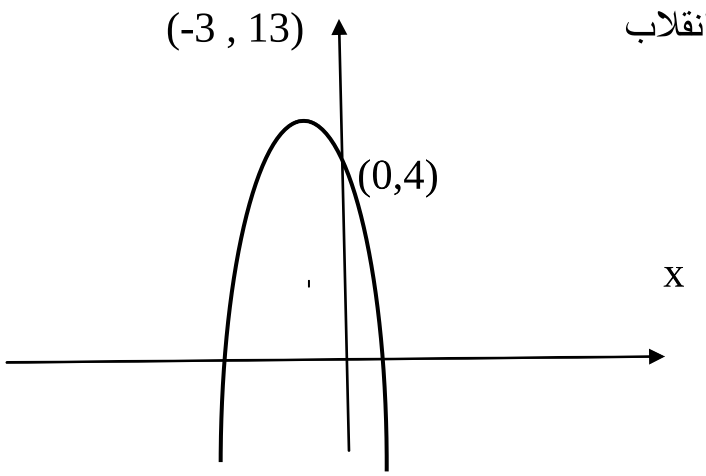
اشارة $f'(x)$ + + + + + -3 - - - - - - - - -

الدالة متزايدة في { x : x > -3 } الدالة متناقصة في { x : x < -3 }

نقطة(13 , 3-) نهاية عظمى محلية

٣- نجد المشتقة الثانية $\quad f''(x) = -2 < 0$

الدالة محدبة فقط ولا توجد نقاط انقلاب



س٢ / بالاستعانة بالتفاضل ارسم منحني الدالة $F(x) = 3x - x^3$

الحل / ١ - التقاطع مع المحورين

نجعل $x = 0$ ونجد قيم y $\quad y = f(0) = 3(0) - 0^3 = 0$

نقطة التقاطع (0 , 0) مع محور الصادات

نجعل $y = 0$ ونجد قيم x $\quad 3x - x^3 = 0$

$x(3 - x^2) = 0$

$x = 0 \quad or \quad 3 - x^2 = 0 \quad x^2 = 3 \quad x = \pm\sqrt{3}$

٢- نجد النهايات العظمى والصغرى $\quad f'(x) = 3 - 3x^2$

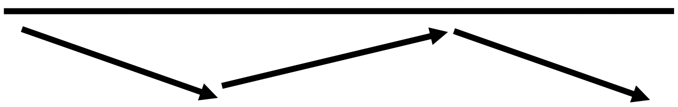
$3 - 3x^2 = 0 \quad 3x = 3 \quad x^2 = 1 \quad x = \pm 1$

$f(-1) = 3(-1) - (-1)^3 = -3 + 1 = -2$

$f(1) = 3(1) - (1)^3 = 3 - 1 = 2$

نقطة(2- , 1-) , (2 , 1) حرجة

أشارة $f'(x)$ $\quad$ - - - - - - $^-1$ + + + + 1 - - - - - - - - -



الدالة متزايدة في (1 . 1-) $\quad$ الدالة متناقصة في $\{x : x < -1\}, \{x : x > 1\}$

نقطة (2 , 1) نهاية عظمى محلية $\quad$ النقطة (2- ,1-) نهاية صغرى محلية

٣- نجد المشتقة الثانية $\quad f'(x) = -6x$

٢- نجعل المشتقة الثانية = صفر $\quad -6x = 0 \Longrightarrow x = 0$

نعوض قيم x في الدالة الاصلية

$f(0) = 3(0) - (0)^3 = 0$

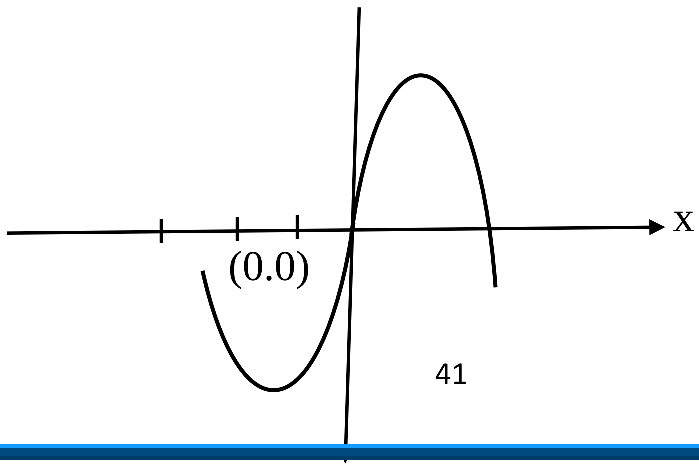
الأستاذ عبدالسلام محمد

أشارة $f''(x)$ $\quad$ + + + + + + 0 - - - - - - -



الدالة محدبة في $\{x : x > 0\}$ $\quad$ الدالة مقعرة في $\{x : x < 0\}$

نقطة الانقلاب هي (0 , 0)



الاستاذ عبدالسلام محمد

س٤ / بالاستعانة بالتفاضل ارسم منحني الدالة $F(x) = x^3 - 2x^2 + 1$

١ - التقاطع مع المحورين

نجعل $x = 0$ ونجد قيم y $\quad y = f(0) = 0 - 0 + 1 = 1$

نقطة التقاطع (0 , 1) مع محور الصادات

نجعل $y = 0$ ونجد قيم x $\quad x^3 - 2x^2 + 2 = 0$

ليس ضروريا لان المعادلة

٢- نجد النهايات العظمى والصغرى $\quad f'(x) = 3x^2 - 4x$

$3x^2 - 4x = 0 \qquad x(3x - 4) = 0$

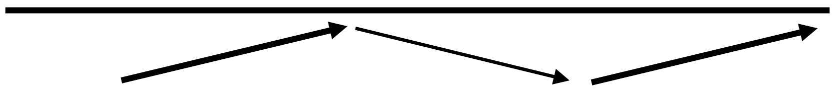
$x = 0 \quad \text{or} \quad 3x - 4 = 0 \Longrightarrow 3x = 4 \Longrightarrow x = 4/3$

$f(0) = 0 - 0 + 1 = 1$

$$f\left(\frac{4}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}\right)^3 - 2\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 1 = \frac{64}{27} - \frac{32}{9} + 1 = \frac{64}{27} - \frac{96}{27} + \frac{27}{27} = \frac{-5}{27}$$

نقطة (1 , 0) , (4/3 , -5/27) حرجة

أشارة $f'(x)$ $\quad$ + + + + + + 0 - - - - - - 4/3 + + + + +



الدالة متزايدة في { x : x > 4/3 } و متزايدة في { x : x < 0 }

الدالة متناقصة في الفترة (0 , 4/3)

نقطة(1 , 0) نهاية عظمى محلية

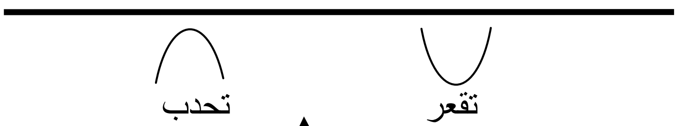
نقطة(4/3 , -5/27) نهاية صغرى محلية

$F''(x) = 6x - 4$

نجعل المشتقة الثانية = صفر $\quad 6x - 4 = 0 \qquad 6x = 4 \qquad x = 2/3$

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 1 = \frac{8}{27} - \frac{8}{9} + 1 = \frac{8}{27} - \frac{24}{27} + \frac{27}{27} = \frac{11}{27}$$

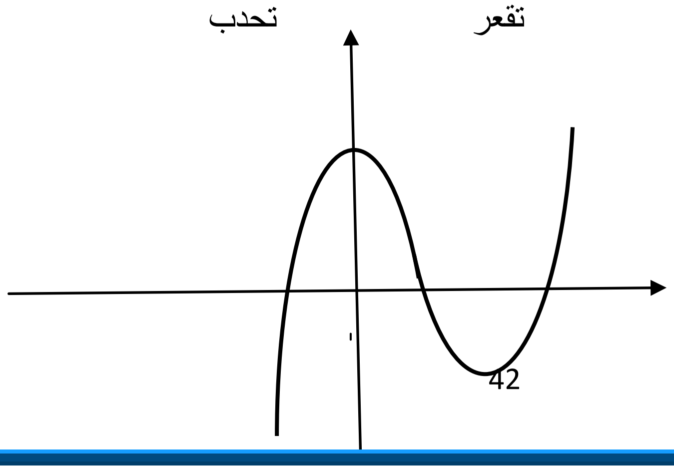
أشارة $f''(x)$ $\quad$ - - - - - - 2/3 + + + + + +



الدالة مقعرة في { x : x > 1 }

الدالة محدبة في { x : x < 1 }

نقطة الانقلاب هي (1 , 1)



س٣ / بالاستعانة بالتفاضل ارسم منحني الدالة $F(x) = (x - 1)^3$

الحل / ١ - التقاطع مع المحورين

نجعل $x = 0$ ونجد قيم y $\quad y = f(0) = (0 - 1)^3 = -1$

نقطة التقاطع (1- , 0) مع محور الصادات

نجعل $y = 0$ ونجد قيم x $\quad (x - 1)^3 = 0$

$x - 1 = 0 \Longrightarrow x = 1 \qquad (1,0)$

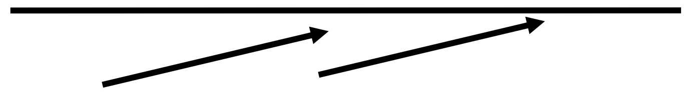
٢- نجد النهايات العظمى والصغرى $\quad f^{/}(x) = 3(x-1)^2$

$3(x-1)^2 = 0 \Longrightarrow (x-1)^2 = 0 \Longrightarrow x - 1 = 0 \Longrightarrow x = 1$

$f(1) = (1 - 1)^3 = 0$

نقطة (1 , 0) حرجة

أشارة $f'(x)$ + + + + + +1 + + + +



الدالة متزايدة فقط $\{x : x < 1\}, \{x : x > 1\}$

نقطة (1 , 0) مجرد حرجة

٣- نجد المشتقة الثانية $\quad f^{//}(x) = 6(x - 1)$

٢- نجعل المشتقة الثانية = صفر $\quad 6(x - 1) = 0 \Longrightarrow x = 1$

نعوض قيم x في الدالة الاصلية

$f(1) = (1 - 1)^3 = 0$

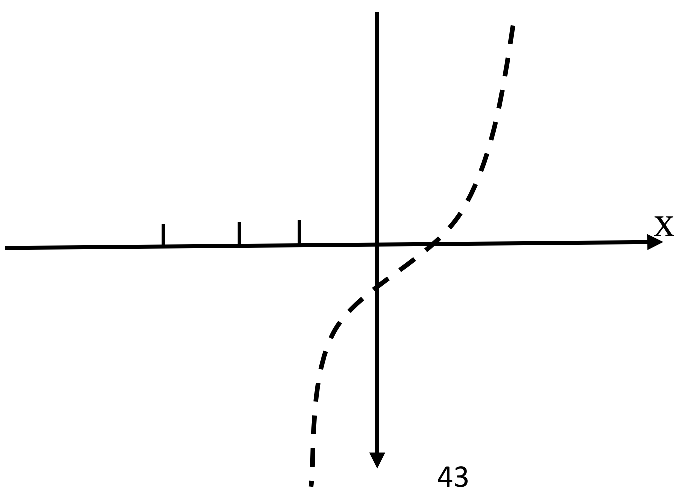
أشارة $f''(x)$ - - - - - - 1 + + + + + +



الدالة محدبة في $\{x : x < 1\}$

الدالة مقعرة في $\{x : x > 1\}$

نقطة الانقلاب هي (1 , 0)



تطبيقات عملية على القيم العظمى والصغرى :-

١- نرسم مخططاً توضيحياً حسب المعلومات في السؤال ونعين عليه الأجزاء .

٢- نكتب الدالة رقم (١) المراد أيجاد قيمتها وذلك من خلال الكلمات (اكبر من ، اقل من -----)

٣- اذا كانت الدالة تحتوي على متغيرين نجد علاقة بين المتغيرين رقم (٢)

٤- نعوض العلاقة في الدالة (١) .

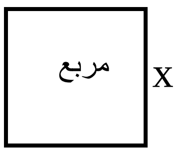
٥- نشتق الدالة رقم (١) ثم نجعلها = 0 ونجد قيمة المتغير .

٦- نعوض قيمة المتغير في العلاقة رقم(٢) لايجاد المتغير الثاني

بعض القوانين التي نحتاج اليها في حل المسائل

١- مساحة المربع = مربع طول الضلع .

٢- محيط المربع = ٤في طول الضلع

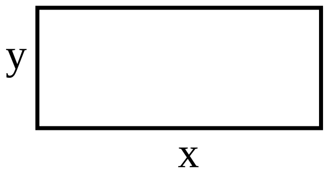


$A = x^2$

$p = 4x$

٣- مساحة المستطيل = الطول في العرض

٤- محيط المستطيل = ٢(الطول + العرض)

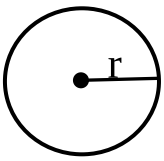


$A = x. y$

$p = 2(x + y)$

٥- مساحة الدائرة = مربع نصف القطر في النسبة الثابتة

٦- محيط الدائرة = ٢ نصف القطر في النسبة الثابتة



$A = \pi r^2$

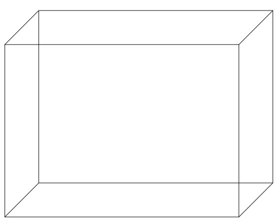
$p = 2\pi r$

---

٧ - حجم متوازي المستطيلة = مساحة القاعدة في الارتفاع

٨- مساحته الجانبية متوازي المستطيلة = محيط القاعدة في الارتفاع

٩- مساحته الكلية متوازي المستطيلة = المساحة الجانبية + ٢مساحة القاعدة



مثال ١ / جد عددين مجموعهما يساوي 20 اذا كان

١- حاصل ضربهما اكبر ما يمكن .

٢- مجموع مربعيهما اصغر ما يمكن .

الحل/

نفرض العدد الاول = x والعدد الثاني = y

الدالة = حاصل ضرب العددين

1) $M = x\,y$ ------ (1)

العلاقة (مجموع العددين = ٢٠)

$x + y = 20 \longrightarrow y = 20 - x$ ------ (2)

نعوض (2) في (1) نحصل على

$M = x(20 - x)$

$M = 20x - x^2$

نجد المشتقة

$M' = 20 - 2x$

نجعل المشتقة = 0

$20 - 2x = 0$

$2x = 20 \qquad x = 10$

نعوض قيمة x = 10 في العلاقة 2

$y = 20 - 10 = 10$

(الدالة = مجموع مربعيهما)

2) $n = x^2 + y^2$ -------- (1)

العلاقة (مجموع العددين = ٢٠)

$x + y = 20 \longrightarrow y = 20 - x$ ------ (2)

نعوض (2) في (1) نحصل على

$N = x^2 + (20 - x)^2$

$N' = 2x + 2(20 - x)(-1) = 2x - 40 + 2x$

$N' = 4x - 40$

نجعل المشتقة = 0

$4x - 40 = 0 \Longrightarrow x = 10$ العدد الاول

نعوض قيمة x = 10 في العلاقة 2 نحصل على العدد الثاني

$y = 20 - 10 = 10$

مثال٢ / جد ابعاد اكبر مستطيل محيطة 40 متر

الحل / نفرض طول المستطيل = x والعرض = y والمساحة = A

$A = x\,y$ ------- (1)

محيط المستطيل = ٢(طول + العرض)

$2(x + y) = 40 \Longrightarrow x + y = 20 \Longrightarrow y = 20 - x$ ------(2)

نعوض معادلة 2 في 1

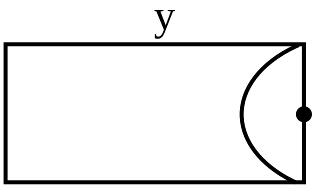
$A = x\,y = x(20 - x) \Longrightarrow A = 20x - x^2$

نشتق $A = 20 - 2x$

$A = 0 \Longrightarrow 20 - 2x = 0 \Longrightarrow 2x = 20 \Longrightarrow x = 10$ الطول

$y = 20 - x = 20 - 10 = 10$ العرض

مثال٣ /من مستطيل محيطه 120 cm قطعت منطقة على شكل نصف دائرة ينطبق قطرها على احد الضلعين الصغيرين للمستطيل ما ابعاد ذلك المستطيل



الحل / نفرض عرض المستطيل = 2x

طول المستطيل = y

مساحة المستطيل = الطول في العرض = 2xy

المساحة المقطوعة = مساحة نصف دائرة (نصف قطر الدائرة= x)

المساحة المقطوعة = $\frac{1}{2}x^2\pi$

$\frac{1}{2}x^2\pi = \frac{1}{2}x^2\left(\frac{22}{7}\right) = \frac{11}{7}x^2$

$m = 2xy - \frac{11}{7}x^2$ ………. (1)

محيط المستطيل $2(2x + y) = 120$

$2x + y = 60 \Longrightarrow y = 60 + 2x$ ------(2)

نعوض 2 في 1

$m = 2x(60 + 2x) - \frac{11}{7}x^2$

$m = 120x + 4x^2 - \frac{11}{7}x^2$

$m^{/} = 120 + 8x - \frac{22}{7}x$

$120 + 8x - \frac{22}{7}x = 0$

بضرب المعادلة في 7

$840 - 56x - 22x = 0$

$840 - 78x = 0 \Longrightarrow 78x = 840 \Longrightarrow x = \frac{840}{78} = \frac{140}{13}$

العرض $= 2x = 2\cdot\frac{140}{13} = \frac{280}{13}$

الطول $= 60 - 2x = 60 - 2\cdot\frac{140}{13} = 60 - \frac{280}{13} = \frac{780}{13} - \frac{280}{13} = \frac{500}{13}$

مثال٤ / ما العدد الذي زيادته ثلاثة أمثال مربعه على مكعبه اكبر ما يمكن ؟

الحل/ نفرض العدد = x

مربع العدد = x^2

مكعب العدد = x^3

$$F(x) = 3x^2 - x^3$$

$$f'(x) = 6x - 3x^2$$

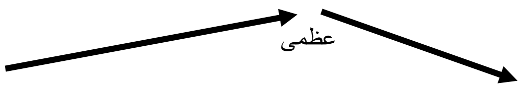
$$6x - 3x^2 = 0$$

$$3x(2 - x) = 0$$

$3x = 0 \qquad x = 0$

$2 - x = 0 \qquad x = 2$

اشارة $f'(x)$ $\quad + + + + + \quad 2 \quad - - - - - -$



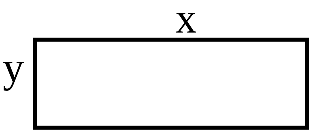
مثال٥ / يراد صنع حوض على شكل متوازي مستطيلات بدون غطاء قاعدته مربعة الشكل وحجمه $864m^3$ اوجد اقل مساحة من الالواح يمكن ان تستخدم في صنعة .

مثال٦ / جد اقل محيط ممكن لمستطيل مساحته $100cm^2$

الحل/ نفرض عرض المستطيل = y

طـول المستطيل = x

نفرض المحيط = P



$P = 2(x + y) = 2x + 2y$ --------(1)

من المساحة

$xy = 100 \Longrightarrow y = \frac{100}{x}$ -------(2)

نعوض 2 في 1 نحصل

$P = 2x + 2\left(\frac{100}{x}\right) = 2x + 200x^{-1}$

$p' = 2 - 200x^{-2} = 2 - \frac{200}{x^2}$

بجعل المشتقة = صفر

$2 - \frac{200}{x^2} = 0 \Longrightarrow \frac{200}{x^2} = 2 \Longrightarrow 2x^2 = 200$

$x^2 = 100 \Longrightarrow x = 10$ cm

المحيط في نهايته الصغرى عندما $y = 10$ فاذا $x = 10cm$

المحيط $P = 2(x + y) = 2(10 + 10) = 40cm$

===

مثال٧ / اذا كانت دالة الكلفة الكلية لإنتاج سلعة معينة هي $c(x) = \frac{1}{9}x^2 + 6x + 100$

جد حجم الإنتاج الذي يكون عنده معدل كلفة اقل ما يمكن

الحل/

$AC = \frac{c(x)}{x} = \frac{1}{9}x + 6 + \frac{100}{x}$

$\frac{d(AC)}{dx} = \frac{1}{9} - \frac{100}{x^2}$

$\frac{d(AC)}{dx} = 0 \Longrightarrow \frac{1}{9} - \frac{100}{x^2} = 0$

$\frac{1}{9} = \frac{100}{x^2} \Longrightarrow x^2 = 900 \Longrightarrow x = 30$

عندما $x = 30$ فان القيمة الصغرى لمعدل الكلفة تحصل عندما يكون حجم الانتاج 30 وحدة

س١ / جد عددين مجموعهما 15 ا حاصل ضرب احدهما في مربع الاخر اكبر ما يمكن .

الحل/

الدالة = حاصل ضرب العددين

نفرض العدد الاول = x والعدد الثاني = y

1) $M = x\,y^2$ ------- (1)

العلاقة (مجموع العددين = ٢٠)

$x + y = 15 \longrightarrow y = 15 - x$ ------ (2)

نعوض (2) في (1) نحصل على

$M = x\,(15 - x)^2$

$M = x(225 - 30x + x^2)$

$M = 225x - 30x^2 + x^3$

نجد المشتقة

$M' = 225 - 30x + 3x^2$

نجعل المشتقة = صفر

$225 - 30x + 3x^2 = 0 \longrightarrow 75 - 10x + x^2 = 0$

$(5 - x)(15 + x) = 0$

$5 - x = 0 \longrightarrow x = 5$

$15 + x = 0 \longrightarrow x = -15$ يهمل

نعوض قيمة $x = 5$ في العلاقة 2

$y = 15 - 5 = 10$

===

س٢/ما العدد الذي زيادته على مربعه اكبر ما يمكن ؟

الحل/ نفرض العدد = x مربع العدد = x^2

$F(x) = x - x^2$

$F'(x) = 1 - 2x$

$1 - 2x = 0$

$2x = 1$

$x = \frac{1}{2}$ العدد المطلوب

اشارة $f'(x)$ + + + + + $\frac{1}{2}$ - - - - - -

عظمى

مدرس المادة عبدالسلام محمد

س3/جد عددين موجبين مجموعهما 15 وحاصل ضرب مربع أحدهما في مكعب الآخر أكبر ما يمكن

الحل / نفرض العدد الأول = x و نفرض العدد الثاني = y

$(f(x) = x^3 y^2)$......(1)

$x + y = 15 \Longrightarrow y = 15 - x$ --------- (2)

$f(x) = x^3 y^2 = x^3(15 - x)^2$

$f(x) = x^3(225 - 30x + x^2) \Longrightarrow f(x) = 225x^3 - 30x^4 + x^5$

نشتق الدالة

$f'(x) = 675x^2 - 120x^3 + 5x^4 \Longrightarrow f'(x) = 0$

$\{675x^2 - 120x^3 + 5x^4 = 0\} \div 5 \Longrightarrow 135x^2 - 24x^3 + x^4 = 0$

$x^2(135 - 24x + x^2) = 0 \Longrightarrow x^2(15 - x)(9 - x) = 0$

أما $x^2 = 0 \Longrightarrow x = 0$

أو $15 - x = 0 \Longrightarrow x = 15$ يهمل

أو $9 - x = 0 \Longrightarrow x = 9$

نعوض $x = 9$ في معادلة رقم (2) لإيجاد قيمة (y) $y = 15 - 9 = 6 \Longrightarrow y = 6$

س4/ جد عددين مجموعهما 10 وحاصل ضرب مربع أحدهما في مربع الآخر أكبر ما يمكن ؟

الحل / نفرض العدد الأول = x ونفرض العدد الثاني = y

$f(x) = x^2 y^2$.......(1)

$x + y = 10 \Longrightarrow y = 10 - x$ ------- (2)

نعوض معادلة (2) في معادلة (1)

$f(x) = x^2 y^2 = x^2(10 - x)^2$

$f(x) = x^2(100 - 20x + x^2) \Longrightarrow f(x) = 100x^2 - 20x^3 + x^4$

$f'(x) = 200x - 60x^2 + 4x^3 \Longrightarrow f'(x) = 0$

$\{200x - 60x^2 + 4x^3 = 0\} \div 4 \Longrightarrow 50x - 15x^2 + x^3 = 0$

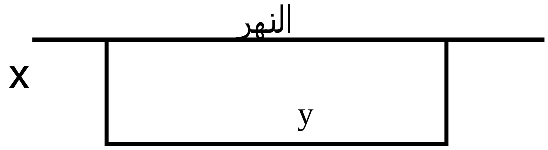
$x(50 - 15x + x^2) = 0 \Longrightarrow x(10 - x)(5 - x) = 0$

أما $x = 0$ or $10 - x = 0 \Longrightarrow x = 10$ يهمل

أو $5 - x = 0 \Longrightarrow x = 5$

نعوض قيمة $X = 5$ في معادلة رقم (2) لنجد قيمة (y) $y = 10 - 5 \Longrightarrow y = 5$

س5/ قطعة أرض مستطيلة الشكل يحدها نهر من أحدى جهاتها جد أكبر مساحة من الأرض يمكن تسييجها بسياج طوله (100) متر ؟



الحل / نفرض أبعاد القطعة x , y

مساحة الأرض= الطول×العرض = (x)×(y)

$A = x \cdot y \ldots\ldots(1)$

طول السياج = 100

$2x + y = 100 \Longrightarrow y = 100 - 2x \ldots\ldots(2)$

نعوض معادلة (2) في (1)

$A = x(100 - 2x)$

$A = 100x - 2x^2$

$A' = 100 - 4x$

$A' = 0 \Longrightarrow 100 - 4x = 0 \Longrightarrow 4x = 100 \Longrightarrow x = 25$

أشارة f ′(x)

+ + + + + 25 - - - - - -

عظمى

البعد الأول $x = 25$ متراً"

البعد الثاني $y \Longleftarrow y = 100 - 2x = 100 - 2(25) = 50$ متراً"

المساحة $A \Longleftarrow \therefore A = (x)(y) = 25 \times 50 = 1250$ " متراً مربعاً"

س/ وزاري 2014 دور الثاني

جد عددين مجموعهما 9 حيث أن حاصل ضرب مربع أحدهما في ثلاثة أمثال الآخر أكبرما يمكن

الحل / نفرض العدد الأول = x

و نفرض العدد الثاني = y

$f(x) = x^2 (3y) \ldots\ldots(1)$

$x + y = 9 \Longrightarrow y = 9 - x \text{ --------- } (2)$

$f(x) = x^2 (3y) = 3x^2 y \Longrightarrow f(x) = 3x^2(9 - x)$

$f(x) = 27x^2 - 3x^3 \Longrightarrow f'(x) = 54x - 9x^2 \Longrightarrow f'(x) = 0$

$\{54x - 9x^2 = 0\} \div 9 \Longrightarrow 6x - x^2 = 0 \Longrightarrow x(6 - x) = 0$

أما $x = 0$ or $6 - x = 0 \Longrightarrow x = 6$

نعوض قيمة x = 6 في معادلة رقم (1) لإيجاد قيمة y

$y = 9 - 6 = 3 \Longrightarrow y = 3$

س6/ حوض على شكل متوازي مستطيلات بدون غطاء قاعدته مربعة حجمه ($108m^3$) جد أبعاده بحيث تكون مساحة الألواح المستخدمة في صنعه أقل ما يمكن؟

ملاحظة
مساحة القاعدة = $(\text{الطول الضلع})^2$
محيط القاعدة = 4 × طول الضلع

الحل/ نفرض طول ضلع القاعدة = x ونفرض الأرتفاع = y

المساحة الكلية لمتوازي المستطيلات = المساحة الجانبية + مساحة قاعدة واحدة (لأنه بدون غطاء)

= محيط القاعدة × الارتفاع + مساحة قاعدة واحدة

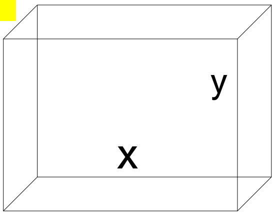
$A = 4xy + x^2$ ------(1)

حجم متوازي المستطيلات = مساحة القاعدة × الأرتفاع = 108

$x^2y = 108 \Longrightarrow y = \frac{108}{x^2}$ .... (2) نعوض معادلة (2) في(1)

$A = 4x\left(\frac{108}{x^2}\right) + x^2 \Longrightarrow A = \left(\frac{432}{x}\right) + x^2$ (نشتق الدالة A)

$A` = \frac{-432}{x^2} + 2X \Longrightarrow A` = 0 \Longrightarrow \{\frac{-432}{x^2} + 2X = 0\} \times x^2$



$\{2x^3 = 432\} \div 2 \Longrightarrow x^3 = 216 \Longrightarrow x = 6$

نعوض قيمة x في (1) لأيجاد قيمة y $\quad y = \frac{108}{(6)^2} = \frac{108}{36} = 3 \Longrightarrow y = 3$

أبعاد الحوض هي:- الطول = 6 متر والعرض = 6 متر والأرتفاع = 3 متر

==

س7 / أطلقت رصاصة إلى الأعلى وكان أرتفاعها (m) متر في نهاية t من الثواني بحيث $m = 224t - 16t^2$ أحسب أقصى أرتفاع تصل أليه الرصاصة؟

الحل/ تصل الرصاصة أعلى أرتفاع عندما تكون السرعة = صفر أي $m'(t) = 0$

$m = 224t - 16t^2$

$m' = 224 - 32t \Longrightarrow m' = 0 \Longrightarrow 224 - 32t = 0$

$32t = 224 \Longrightarrow t = 224 / 32 \Longrightarrow t = 7s$

يصل الجسم أقصى أرتفاع بعد (7) ثواني

$m(7) = 224(7) - 16(7)^2 = 784\ m$

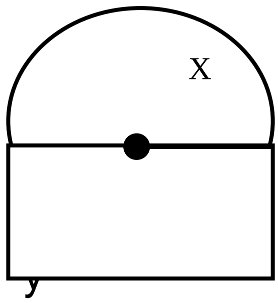
س8/ نافذة على شكل مستطيل يعلوه نصف دائرة بحيث ينطبق قطرها على احد أبعاد المستطيل فأذا كان محيط المستطيل 8m جد أبعاد المستطيل لكي تكون مساحة النافذة أكبر ما يمكن ؟

الحل/ نفرض طول المستطيل = 2x ، عرض المستطيل = y , نصف قطر الدائرة = x

مساحة النافذة = مساحة المستطيل + نصف مساحة الدائرة

$$A = 2xy + \frac{1}{2}x^2\pi \quad ---(1)$$

(2016 تمهيدي)



محيط المستطيل = 2 × (طول + العرض) $\quad 2(2x + y) = 8$

بعد قسمة طرفي المعادلة على (2) $\Longrightarrow \quad 2x + y = 4$

$y = 4 - 2x \quad ------- (2)$

نعوض معادلة (2) في المعادلة (1)

$$A = 2x(4 - 2x) + \frac{1}{2}x^2\pi \Longrightarrow A = 8x - 4x^2 + \frac{1}{2}x^2\pi$$

$$A' = 8 - 8x + x\pi \Longrightarrow A' = 0 \Longrightarrow 8 - 8x + x\pi = 0$$

$$-8x + x\pi = -8 \Longrightarrow x(-8 + \pi) = -8$$

$$x = \frac{-8}{-8+\pi} \Longrightarrow x = \frac{-8}{\pi-8}$$

$2x = \frac{16}{8-\pi}\, m$ طول المستطيل

نعوض (2x) في معادلة (2) لأيجاد قيمة العرض (y)

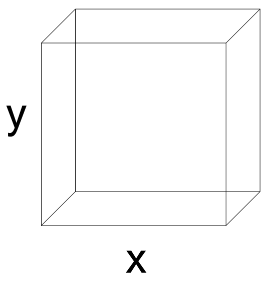
$y = 4 - \frac{16}{8-\pi} = \frac{32-4\pi-16}{8-\pi} \Longrightarrow y = \frac{16-4\pi}{8-\pi}\, m$ عرض النافذة

س9/في ورشة نجـاره يراد صنع صندوق من الخشب على شكل متوازي السطوح قاعدته مربعة الشكل بدون غطاء . جد أبعاد الصندوق لكي يكون حجمه أكبر ما يمكن علما" أن مجموع محيط قاعدته وأرتفاعه هو 90 m .

الحـل/

نفرض طول ضلع القاعدة = x ، الارتفاع = y ، حجم الصندوق = V

حجم متوازي السطوح = مساحة القاعدة × الارتفاع $V = x^2 y$ ------(1)



محيط القاعدة + الارتفاع = 90 ⟸ $4x + y = 90$

$y = 90 - 4x$ ------(2)

نعوض (2) في (1)

$V = x^2 (90 - 4x) = 90x^2 - 4x^3$

$V' = 180x - 12x^2 \Longrightarrow V' = 0 \Longrightarrow 180x - 12x^2 = 0$

$x(180 - 12x) = 0$

أما $x = 0$ تهمل or $180 - 12x = 0 \Longrightarrow 12x = 180 \Longrightarrow x = 15$ m

نعوض $x = 15$ في معادلة (2) لإيجاد قيمة y $y = 90 - 4(15) = 90 - 60 = 30$m

أبعاد الصندوق هي الطول (x) = 15m العرض (x) = 15m الارتفاع (y) = 30m

---

س 10 / أذا كانت دالة الكلفة الكلية لأنتاج سلعة معينة هي $\mathbf{c(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 40}$

جد حجم الأنتاج الذي يكون عنده معدل الكلفة أقل ما يمكن ؟

الحـل/

$$\mathbf{AC = \frac{c(x)}{x} = \frac{1}{2}x + 1 + \frac{40}{x}}$$

$$\frac{d(AC)}{dx} = \frac{1}{2} - \frac{40}{x^2}$$

$$\frac{d(AC)}{dx} = 0 \Longrightarrow \frac{1}{2} - \frac{40}{x^2} = 0$$

$$\frac{1}{2} = \frac{40}{x^2} \Longrightarrow x^2 = 80 \Longrightarrow x = \sqrt{40} = 4\sqrt{5}$$

عندما $\mathbf{x = 4\sqrt{5}}$ فان القيمة الصغرى لمعدل الكلفة تحصل عندما يكون حجم الانتاج $\mathbf{4\sqrt{5}}$ وحدة

نهاية الفصل الثالث

أعداد الأستاذ عبدالسلام محمد علي

07712440055 or 07811191100

ملزمة

الرياضيات

Mathematics

للصف السادس الادبي

أعداد الأستاذ

عبدالسلام محمد علي

2016

الفصل الرابع [التكامل]

$$\int f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

مدرس المادة عبدالسلام محمد

2016 - 2017

التكامل

التكامل : هو عملية معاكسة لعملية الاشتقاق ويرمز له بالرمز $\int$

الرمز **dx - - -** $\int$ يعني التكامل بالنسبة لـ x
لرمز **dy - - -** $\int$ يعني التكامل بالنسبة لـ y

ملاحظة : ليس لدينا قاعدة لتكامل كل من (١ـ الكسر ٢ـ الجذر ٣ـ حاصل ضرب دالتين)

قواعد التكامل غير المحدد :

١ـ تكامل دالة الثابت

$$\int a\,dx = ax + c$$ حيث c ثابت التكامل

أمثلة/

1) $\int 6\,dx = 6x + c$

2) $\int -\,dx = -x + c$

3) $\int \sqrt{5}\,dx = \sqrt{5}\,x + c$

٢ـ تكامل $\int x^n dx$

$$2)\ \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

ملاحظة / اذا أردنا ان تكامل المتغيرx فأننا نكتب المتغير ونضيف الى الأس واحد ونقسم على الأس الجديد ونضيف ثابت التكامل c

امثلة /

$$\int \frac{1}{x^2}dx = \int x^{-2}dx = \frac{x^{-1}}{-1} + c = \frac{-1}{x} + c$$

$$\int \frac{1}{x^3}dx = \int x^{-3}dx = \frac{x^{-2}}{-2} + c = \frac{-1}{2x^2} + c$$

$$\int \frac{1}{x^4}dx = \int x^{-4}dx = \frac{x^{-3}}{-3} + c = \frac{-1}{3x^3} + c$$

$$\int \frac{1}{x^5}dx = \int x^{-5}dx = \frac{x^{-4}}{-4} + c = \frac{-1}{4x^4} + c$$

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c$$

$$\int x^2dx = \frac{x^3}{3} + c$$

$$\int x^4dx = \frac{x^5}{5} + c$$

$$\int x^5dx = \frac{x^6}{6} + c$$

$$\int 5x^3\,dx = \frac{5x^4}{4} + c$$

$$\int 4x^2\,dx = \frac{4x^3}{3} + c$$

الأستاذ عبدالسلام محمد

تكامل الجذور

السادس العلمي

1) $\int \sqrt{x}\ dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3}\ x^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$

2) $\int \sqrt[3]{x}\ dx = \int x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{3}{4}\ x^{\frac{4}{3}} + c = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + c$

3) $\int \sqrt[4]{x}\ dx = \int x^{\frac{1}{4}} dx = \frac{4}{5}\ x^{\frac{5}{4}} + c = \frac{4}{5}\sqrt[4]{x^5} + c$

4) $\int \sqrt[3]{x^2}\ dx = \int x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{3}{5}\ x^{\frac{5}{3}} + c = \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + c$

5) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{\frac{-1}{2}}\ dx = 2\ x^{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{x} + c$

6) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int x^{\frac{-1}{3}}\ dx = \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} + c = \frac{3}{2}\ \sqrt[3]{x^2} + c$

7) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \int x^{\frac{-2}{3}}\ dx = \frac{3}{1} x^{\frac{1}{3}} + c = 3\sqrt[3]{x} + c$

تكامل الدوال كثيرة الحدود

8) $\int (3x^2\ +\ 5)dx = \frac{3x^3}{3} + 5x + c = x^3 + 5x + c$

9) $\int (5x^2 + 3x - 2)dx = \frac{5x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 2x + c$

10) $\int \left(\frac{3}{4}x^3 + x - \frac{1}{2}\right) dx = \frac{3}{4} \cdot \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}x + c$

11) $\int (x^2 + 2x^{-3})dx = \frac{x^3}{3} + 2 \cdot \frac{x^{-2}}{-2} + c = \frac{x^3}{3} - x^{-2} + c$

س1 / جد التكامل $\int(6x^2 - 4x + 3)dx$ (وزاري ٢٠١٣ د١)

الحل //

$$\int(6x^2 - 4x + 3)dx = \frac{6x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 3x + c = 2x^3 - 2x^2 + 3x + c$$

==

مثال / جد التكامل $\int(\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}} - 1)dx$

الحل /

$$\int(\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}} - 1)dx = \int(x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{-2}{3}} - 1)dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 9x^{\frac{1}{3}} - x + c$$

==

س10/ جد التكامل $\int(3x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}})dx$

الحل /

$$\int(3x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}})dx = \int\left(3x^2 + x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$$

$$= x^3 + 2x^{\frac{1}{2}} + c$$

==

س13/ جد التكامل $\int(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}})dx$

الحل /

$$\int(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}})dx = \int(x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{-2}{3}})dx = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}} + c$$

==

س/وزاري ٢٠١٠ دور ١/ جد $\int\left(x^3 + \frac{2}{x^4}\right)dx$

$$\int\left(x^3 + \frac{2}{x^4}\right)dx = \int(x^3 + 2x^{-4})dx = \frac{x^4}{4} + \frac{2x^{-3}}{-3} + c$$

$$= \frac{x^4}{4} - \frac{2}{3x^3} + c$$

==

ملاحظة / ١- التخلص من الأقواس اذا كانت الأقواس ليس لها أس كما في المثال التالي

مثال / جد التكامل $\int (2x + 5)(x+ 1)\, dx$

الحل /

$$\int (2x + 5)(x + 1)\, dx = \int 2x^2 + 2x + 5x + 5\, dx$$
$$= \int 2x^2 + 7x + 5\, dx$$
$$= \frac{2x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} + 5x + c$$

==========

مثال / جد التكامل $\int (x^2 + 1)(2x - 3)\, dx$

الحل /

$$\int (x^2 + 1)(2x - 3)\, dx = \int (2x^3 - 3x^2 + 2x - 3)dx$$
$$= \frac{2x^2}{4} - \frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} - 3x + c$$
$$= \frac{x^2}{2} - x^3 + x^2 - 3x + c$$

==========

س2 / جد التكامل $\int (3x - 1)(x + 5)\, dx$ وزاري ٢٠١١د١

الحل /

$$\int (3x - 1)(x + 5)dx = \int (3x^2 + 15x - x - 5)dx$$
$$= \int (3x^2 + 14x - 5)dx$$
$$= x^3 + 7x^2 - 5x + c$$

==========

س16 / جد التكامل $\int x(\sqrt{x^3} + 4)dx$

الحل /

$$\int x(\sqrt{x^3} + 4)dx = \int x\left(x^{\frac{3}{2}} + 4\right) dx$$
$$= \int x^{\frac{5}{2}} + 4x\, dx = \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} + 2x^2 + c$$

==========

س3 / جد التكامل $\int \sqrt{x}(\sqrt{x} + 5)dx$ (وزاري ٢٠١٢ د١)

الحل /

$$\int \sqrt{x}(\sqrt{x} + 5)dx = \int x + 5x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^2}{2} + \frac{10}{3} x^{\frac{3}{2}} + c$$

ملاحظة / ٢ـ التخلص من القوس اذا كان الأس القوس =2 والمشتقة داخل القوس غير موجودة

س3/ جد التكامل $\int \sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2 dx$

الحل /

$$\int \sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2 dx = \int x^{\frac{1}{2}}\left(x+2\sqrt{x}+1\right)dx$$
$$= \int (x^{\frac{3}{2}} + 2x + x^{\frac{1}{2}})dx$$
$$= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + x^2 + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$$

===

س5/ جد التكامل $\int \sqrt{x}(\sqrt{x}+2)^2 dx$

الحل/

$$\int \sqrt{x}(\sqrt{x}+2)^2 dx = \int x^{\frac{1}{2}}\left(x+4\sqrt{x}+4\right)dx$$
$$= \int (x^{\frac{3}{2}} + 4x + 4x^{\frac{1}{2}})dx$$
$$= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + 2x^2 + \frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$$

===

٣ـ تكامل دالة مرفوعة الى أس

$$3)\ \int [F(x)]^n f'(x)dx = \frac{[F(x)]^{n+1}}{n+1} + c$$

اذا كانت احد الأقواس مرفوع الى أس وكان القوس الثاني هو مشتقة داخل القوس الأول

فإننا نكامل القوس الأول فقط ونقسم على الأس الجديد ونضيف ثابت c كما في المثال التالي

===

مثال/ جد التكامل $\int (2x)(x^2-3)^3 dx$

الحل/ نلاحظ مشتقة داخل القوس = 2x (وهي موجودة)

$$\int (x^2-3)^3\, 2x\, dx = \frac{(x^2-3)^4}{4} + c$$

===

مثال/ جد التكامل $\int (x^3+7)^5 x^2 dx$

الحل/ نلاحظ مشتقة داخل القوس = $3x^2$ (فقط نحتاج 3)

$$\int (x^3+7)^5 x^2 dx = \frac{1}{3}\int (x^3+7)^5 3x^2 dx$$
$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{(x^3+7)^6}{6} + c = \frac{(x^3+7)^6}{18} + c$$

مثال/ جد التكامل $\int \frac{x-2}{(x^2-4x+5)^2}dx$

الحل /

$$\int \frac{x-2}{(x^2-4x+5)^2}dx = \frac{1}{2}\int (x^2-4x+5)^{-2}(2x-4)dx$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2-4x+5)^{-1}}{-1} + c$$
$$= \frac{1}{-2(x^2-4x+5)} + c$$

==

ملاحظة / نتعامل مع الجذر معاملة القوس مرفوع الى أس

مثال / جد التكامل $\int \frac{x^3}{\sqrt[5]{5-x^4}}dx$

الحل /

$$\int \frac{x^3}{\sqrt[5]{5-x^4}} = \frac{-1}{4}\int (5-x^4)^{\frac{-1}{5}}(-4x^3)$$
$$= \frac{-1}{4}\cdot\frac{5}{4}(5-x^4)^{\frac{4}{5}} + c$$
$$= \frac{-5}{16}(5-x^4)^{\frac{4}{5}} + c$$

==

س٦ / جد التكامل $\int \frac{x^2+2}{\sqrt[3]{x^3+6x+1}}dx$

الحل /

$$\int \frac{x^2+2}{\sqrt[3]{x^3+6x+1}}dx = \frac{1}{3}\int (x^3+6x+1)^{\frac{-1}{3}}(3x^2+6)$$
$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}(x^3+6x+1)^{\frac{2}{3}} + c$$
$$= \frac{1}{2}(x^3+6x+1)^{\frac{2}{3}} + c$$

==

س١١/ جد التكامل $\int \frac{ydy}{(19-2y^2)^{\frac{1}{3}}}$

الحل /

$$\int \frac{ydy}{(19-2y^2)^{\frac{1}{3}}} = \frac{-1}{4}\int (19-2y^2)^{\frac{-1}{3}}(-4y)dy$$
$$= \frac{-1}{4}\cdot\frac{3}{2}(19-2y^2)^{\frac{2}{3}} + c$$
$$= \frac{-3}{8}(19-2y^2)^{\frac{2}{3}} + c$$

س14/ جد التكامل $\int \sqrt[5]{(1-3x)^2}\, dx$

الحل/

$$\int \sqrt[5]{(1-3x)^2}\, dx = \frac{-1}{3}\int (1-3x)^{\frac{2}{5}}(-3\, dx)$$

$$= \frac{-1}{3}\cdot\frac{5}{7}(1-3x)^{\frac{7}{5}} + c$$

$$= \frac{-5}{21}(1-3x)^{\frac{7}{5}} + c$$

==========

س15 / جد التكامل $\int x^2(\sqrt{x^3+4})dx$

الحل /

$$\int x^2\left(\sqrt{x^3+4}\right)dx = \frac{1}{3}\int (x^3+4)^{\frac{1}{2}}\, 3x^2 dx$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}(x^3+4)^{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{9}(x^3+4)^{\frac{3}{2}} + c$$

==========

س9/ جد التكامل $\int \frac{x^2+1}{\sqrt[3]{x^3+3x+1}} dx$

الحل /

$$\int \frac{x^2+1}{\sqrt[3]{x^3+3x+1}} dx = \frac{1}{3}\int (x^3+3x+1)^{\frac{-1}{3}}(3x^2+3)$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}(x^3+3x+1)^{\frac{2}{3}} + c$$

$$= \frac{1}{2}(x^3+3x+1)^{\frac{2}{3}} + c$$

==========

س12/جد التكامل $\int \frac{\sqrt[3]{\sqrt{x}-1}}{\sqrt{x}}$

الحل /

$$\int \frac{\sqrt[3]{\sqrt{x}-1}}{\sqrt{x}} = \int \frac{(x^{\frac{1}{2}}-1)^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}} dx$$

$$= 2\int (x^{\frac{1}{2}}-1)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right) dx$$

$$= 2\cdot\frac{3}{4}(x^{\frac{1}{2}}-1)^{\frac{4}{3}} + c$$

$$= \frac{3}{2}(x^{\frac{1}{2}}-1)^{\frac{4}{3}} + c$$

س13 / جد التكامل $\int \frac{x^4}{\sqrt[5]{a^2x^5+b^2}}dx$

الحل /

$$\int \frac{x^4}{\sqrt[5]{a^2x^5+b^2}}dx = \frac{1}{5a^2}\int (a^2x^5+b^2)^{\frac{-1}{5}}(5a^2x^3)$$
$$= \frac{1}{5a^2}\cdot\frac{5}{4}(a^2x^5+b^2)^{\frac{4}{5}}+c$$
$$= \frac{1}{4a^2}(a^2x^5+b^2)^{\frac{4}{5}}+c$$

اذا كانت مشتقة داخل القوس غير موجودة فتوجد حالتين :-

الحالة الاولى : استخدام المربع الكامل اذا كانت الحدود ثلاث كما في الأمثلة الآتية

مثال/ جد التكامل $\int \frac{1}{\sqrt[5]{x^2-14x+49}}dx$

الحل

$$\int \frac{1}{\sqrt[5]{x^2-14x+49}}dx = \int \frac{1}{\sqrt[5]{(x-7)^2}}dx/$$
$$= \int (x-7)^{\frac{-2}{5}}dx$$
$$= \frac{5}{3}(x-7)^{\frac{3}{5}}+c = \frac{5\sqrt[5]{(x-7)^3}}{3}+c$$

س8/ جد التكامل $\int \frac{1}{\sqrt[5]{x^2+16x+64}}dx$ وزاري ٢٠١٣

الحل /

$$\int \frac{1}{\sqrt[5]{x^2+16x+64}}dx = \int \frac{1}{\sqrt[5]{(x+8)^2}}dx$$
$$= \int (x+8)^{\frac{-2}{5}}dx$$
$$= \frac{5}{3}(x+8)^{\frac{3}{5}}+c = \frac{5\sqrt[5]{(x+8)^3}}{3}+c$$

س15/ جد التكامل $\int \frac{dx}{4x^2-12x+9}$

الحل /

$$\int \frac{dx}{4x^2-12x+9} = \int \frac{dx}{(2x-3)^2}$$
$$= \frac{1}{2}\int (2x-3)^{-2}\,2dx$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{(2x-3)^{-1}}{-1}+c$$
$$= \frac{-1}{2(2x-3)}+c$$

الحالة الثانية : استخراج العامل المشترك كما في الأمثلة الآتية

مثال/ جد التكامل $\int \sqrt[3]{3x^3 - 5x^5}\, dx$

الحل/

$$\int \sqrt[3]{3x^3 - 5x^5}\, dx = \int \sqrt[3]{x^3(3 - 5x^2)}\, dx$$
$$= \int x \sqrt[3]{(3 - 5x^2)}\, dx$$
$$= \frac{-1}{10}\int (3 - 5x^2)^{\frac{1}{3}}(-10x)\, dx$$
$$= \frac{-1}{10} \cdot \frac{3}{4}(3 - 5x^2)^{\frac{4}{3}} + c$$
$$= \frac{-3}{40}(3 - 5x^2)^{\frac{4}{3}} + c$$

س9/ جد التكامل $\int \sqrt[7]{2x^9 - 3x^7}\, dx$

الحل /

$$\int \sqrt[7]{2x^9 - 3x^7}\, dx = \int \sqrt[7]{x^7(2x^2 - 3)}\, dx$$
$$= \int x \sqrt[7]{(2x^2 - 3)}\, dx$$
$$= \frac{1}{4}\int (2x^2 - 3)^{\frac{1}{7}}(4x)\, dx$$
$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{8}(2x^2 - 3)^{\frac{8}{7}} + c = \frac{7}{32}(2x^2 - 3)^{\frac{8}{7}} + c$$

س17/ جد التكامل $\int \sqrt[3]{2x^5 - 7x^3}\, dx$

الحل/

$$\int \sqrt[3]{2x^5 - 7x^3}\, dx = \int \sqrt[3]{x^3(2x^2 - 7)}\, dx$$
$$= \int x \sqrt[3]{(2x^2 - 7)}\, dx$$
$$= \frac{1}{4}\int (2x^2 - 7)^{\frac{1}{3}}(4x)\, dx$$
$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}(2x^2 - 3)^{\frac{4}{3}} + c$$
$$= \frac{3}{16}\sqrt[3]{2x^2 - 3)^4} + c$$

ملاحظة /
اذا كانت الدالة كسرية وكل من البسط والمقام ليس مرفوع الى أس في هذه الحالة نستخدم التحليل

==========

مثال/ جد التكامل $\int \frac{x^4-8x}{x-2} dx$

الحل /

$$\int \frac{x^4-8x}{x-2} dx = \int \frac{x(x^3-8)}{x-2} dx$$
$$= \int \frac{x(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2} dx$$
$$= \int x(x^2+2x+4) dx$$
$$= \int (x^3+2x^2+4x) dx = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + 2x^2 + c$$

==========

س4/ جد التكامل $\frac{x^3+27}{x+3} dx$

الحل

$$\int \frac{x^3+27}{x+3} dx = \int \frac{(x+3)(x^2-3x+9)}{x+3} dx$$
$$= \int x^2 - 3x + 9 dx$$
$$= \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 9x + c$$

==========

س12/ جد التكامل $\int \frac{x^4-16}{x+2} dx$ وزاري ٢٠١٣د٢

الحل

$$\int \frac{x^4-16}{x+2} dx = \int \frac{(x^2-4)(x^2+4)}{x+2}$$
$$= \int \frac{(x+2)(x-2)(x^2+4)}{x+2} dx$$
$$= \int (x-2)(x^2+4) dx$$
$$= \int (x^3-2x^2+4x-8) dx = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + 2x^2 - 8x + c$$

==========

س7/ جد التكامل $\int \frac{x^4-1}{x-1} dx$

الحل

$$\int \frac{x^4-1}{x-1} dx = \int \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x-1} dx$$
$$= \int \frac{(x+1)(x-1)(x^2+1)}{x-1} dx$$
$$= \int (x+1)(x^2+1) dx$$
$$= \int (x^3+x^2+x+1) dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + c$$

==========

س/ جد التكامل $\int \frac{x^3+3x^2}{x+3} dx$ وزاري ٢٠١١د١

مثال/ جد التكامل $\int \frac{(3x^2-4)^2-16}{x^2}dx$

الحل /

$$\int \frac{(3x^2-4)^2-16}{x^2}dx = \int \frac{9x^4-24x^2+16-16}{x^2}dx$$
$$= \int \frac{9x^4-24x^2}{x^2}dx$$
$$= \int 9x^2 - 24$$
$$= 3x^3 - 24x + c$$

==

س5 / جد التكامل $\int \frac{x^3-2x^2+1}{5x^5}dx$

الحل /

$$\int \frac{x^3-2x^2+1}{5x^5}dx = \int (\frac{x^3}{5x^5} - \frac{2x^2}{5x^5} + \frac{1}{5x^5})dx$$
$$= \int \left(\frac{1}{5x^2} - \frac{2}{5x^3} + \frac{1}{5x^5}\right)dx$$
$$= \int \left(\frac{1}{5}x^{-2} - \frac{2}{5}x^{-3} + \frac{1}{5}x^{-5}\right)dx$$
$$= \frac{1}{5}\cdot\frac{x^{-1}}{-1} - \frac{2}{5}\cdot\frac{x^{-2}}{-2} + \frac{1}{5}\cdot\frac{x^{-4}}{-4} + c$$
$$= -\frac{1}{5x} + \frac{2}{10x^2} - \frac{1}{20x^4} + c$$

==

س٧ / جد التكامل $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}+2}{\sqrt[3]{x}}dx$

الحل /

$$\int \frac{\sqrt[3]{x^2}+2}{\sqrt[3]{x}}dx = \int (\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} + \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}})dx$$
$$= \int (x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}})dx = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + c$$

==

س11/ جد التكامل $\int (\frac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}})dx$

الحل /

$$\int (\frac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}})dx = \int (\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}} + \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}})dx$$
$$= \int (x^{-\frac{1}{3}} + x^{-\frac{2}{3}})dx$$
$$= \frac{3}{3}x^{\frac{3}{3}} + 3x^{\frac{1}{3}} + c$$

بعض تطبيقات التكامل غير المحدد

اولاً / التطبيق الهندسي (أيجاد معادلة المنحني)

١- اذا أعطى في السؤال ميل المنحني ونقطة فاننا نكامل الميل ونضيف ثابت التكامل ثم نعوض النقطة (x , y) لإيجاد c ثم نعوض قيمة c في معادلة المنحني

$y = \int$ الميل dx

٢- اذا أعطى في السؤال ميل المنحني وكان للمنحني نهاية عظمى او صغرى قيمتها a في هذه الحالة نجعل الميل = 0 ونجد قيم x حيث y = a ثم نكامل الميل ونضيف ثابت التكامل ثم نعوض النقطة (x,y) لإيجاد c ثم نعوض قيمة c في معادلة المنحني

٣- اذا أعطى في السؤال المشتقة الثانية في هذه حالة نكامل مرتين

==

مثال١ / جد معادلة المنحني الذي ميله عند (x,y) من نقاطه هي $3x^2 - 2x + 1$ جد معادلة المنحني الذي يمر بالنقطة (2,3)

الحل / الميل المنحني = المشتقة منحني في تلك النقطة

$$y = \int (3x^2 - 2x + 1)dx$$

$$y = \frac{3x^2}{3} - \frac{2x^2}{2} + x + c$$

$$y = x^3 - x^2 + x + c$$

النقطة (2,3) تحقق معادلة المنحني وعليه

$$3 = 8 - 4 + 2 + c$$

$$3 = 6 + c \longrightarrow c = 3 - 6 = -3$$

اذن معادلة المنحني $y = x^3 - x^2 + x - 3$

مثال2/ منحني ميله عند اية نقطة (x,y) يساوي $x\sqrt{x^2+9}$ جد معادلة المنحني الذي يمر بالنقطة (0,7)

الحل / الميل المنحني = المشتقة منحني في تلك النقطة

$$y = \int (x\sqrt{x^2+9})dx$$

$$y = \frac{1}{2}\int (x^2+9)^{\frac{1}{2}} 2x dx$$

$$y = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(x^2+9)^{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+9)^3} + c$$

النقطة تحقق

$$7 = \frac{1}{3}\sqrt{(0+9)^3} + c \Longrightarrow 7 = \frac{1}{3}(27) + c \Longrightarrow 7 = 9 + c \Longrightarrow c = -2$$

معادلة المنحني هي $y = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+9)^3} - 2$

مثال3/ جد معادلة المنحني الذي ميله عند (x , y) من نقاطه هي $2x - 4$ وكان للمنحني نهاية صغرى قيمتها (-3)

الحل/ بما ان للمنحني نهاية صغرى في (x , y) تساوي -3 اي ان $f'(x) = 0$

$$2x - 4 = 0$$

$$2x = 4 \Longrightarrow x = 2 \Longrightarrow y = -3$$

(2 , -3) هي التي تمثل نهاية صغرى

$$y = \int 2x - 4\, dx$$

$$y = x^2 - 4x + c$$

نعوض (2 , -3) في معادلة المنحني

$$-3 = (2)^2 - 4(2)^2 + c$$

$$-3 = 4 - 8 + c$$

$$-3 = -4 + c$$

$$c = -3 + 4 = 1$$

∴ معادلة المنحني

$$y = x^2 - 4x + 1$$

==

مثال4/ جد معادلة المنحني الذي مشتقته الثانية $6x$ والذي يمر بالنقطتين (1,6) , (-1 ,6)

الحل /

$$y' = \int 6x\; dx$$

$$y' = 3x^2 + c1$$

$$y = \int 3x^2 + c_1\, dx$$

$$y = x3 + c_1 x + c_2$$

النقطة (6 , 1-) تحقق معادلة المنحني

$$6 = (-1)^3 \ -1c_1 + c_2 \qquad 6 = -1 - c_1 + c_2$$

$$7 = -c_1 + c_2 \quad \text{-------}(1)$$

النقطة (6 , 1) تحقق معادلة المنحني

$$6 = (1)^3 + 1c_1 + c_2 \Longrightarrow 6 = 1 + c_1 + c_2 \quad \text{-------}(2)$$

$$5 = c_1 + c_2 \quad \text{-------}(2)$$

$$7 = -c_1 + c_2 \quad \text{-------}(1)$$

بالجمع -------------------------------------

$$12 = 2c_2 \Longrightarrow c_2 = 6$$

نعوض $c_2 = 6$ في معادلة (2)

$$5 = c_1 + 6 \Longrightarrow c_1 = 5 - 6 = -1$$

نعوض كل من c_1 , c_2 في معادلة المنحني

$$y = x^3 - x + 6$$

مثال5/ جد معادلة المنحني الذي ميله عند (x , y) من نقاطه هي $x^2 - x - 2$ وكان للمنحني نهاية عظمى تنتمي لمحور السينات .

الحل / بما ان للمنحني نهاية عظمى تنتمي لمحور السينات $y = 0$, $f(x) = 0$

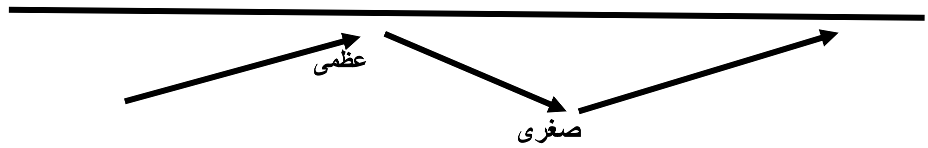
$x^2 - x - 2 = 0$

$(x - 2)(x + 1) = 0$

اما $x - 2 = 0 \Longrightarrow x = 2$

او $x + 1 = 0 \Longrightarrow x = -1$

اشارة f (x)   + + + + +   -1 - - - - - -   2   + + + + + +



(-1 , 0) هي التي تمثل نهاية عظمى

$$y = \int (x^2 - x - 2)dx$$

$$y = \frac{x^2}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + c$$

النقطة (- 1 , 0) تحقق معادلة المنحني

$$0 = \frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^2}{2} - 2(-1) + c$$

$$0 = \frac{-1}{3} - \frac{1}{2} + 2 + c$$

$$c = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2$$

$$c = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} - \frac{12}{6}$$

$$c = \frac{-7}{6}$$

معادلة المنحني

$$y = \frac{x^2}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{7}{6}$$

مثال6 /جد معادلة المنحني الذي ميله عند (x,y) من نقاطه هي $ax^2 - 6x - 9$ وللمنحني نقطة الانقلاب (1,-6)

$y' = ax^2 - 6x - 9$

$y'' = 2ax - 6$

$2a(1) - 6 = 0 \Longrightarrow 2a - 6 = 0 \Longrightarrow 2a = 6 \Longrightarrow a = 3$

نعوض a = 3

$y' = 3x^2 - 6x - 9$

$$y = \int y'\,dx = \int 3x^2 - 6x - 9\ dx$$

$y = x^3 - 3x^2 - 9x + c$

نعوض (1 , -6) في معادلة المنحني

$-6 = (1)^3 - 3(1)^2 - 9(1) + c$

$-6 = 1 - 3 - 9 + c \Longrightarrow -6 = -11 + c \Longrightarrow c = -6 + 11 = 5$

نعوض c = 5

$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$

==

مثال**7/** جد الدالة التي تحقق : $\frac{d^2y}{dx^2} = 12x^2 - 2$, $\frac{dy}{dx} = 5$ عند النقطة$(1\,,2)$

الحل/

$y'' = 12x^2 - 2$

$y' = \int(12x^2 - 2)\,dx$

$y' = 4x^3 - 2x + c$

بما ان $x = 1$, $y = 5$

$5 = 4 - 2 + c_1$

$5 = 2 + c_1 \Longrightarrow c_1 = 5 - 2 \Longrightarrow c_1 = 3$

$y' = 4x^3 - 2x + 3$

$$y = \int 4x^3 - 2x + 3\ dx$$

$y = x^4 - x^2 + 3x + c$

النقطة (2 , 1) تحقق معادلة المنحني

$2 = 1 - 1 + 3 + c_2$

$2 = 3 + c_2 \Longrightarrow c_2 = 2 - 3 = -1$

معادلة المنحني $y = x^4 - x^2 + 3x - 1$

مثال8/ جد معادلة المنحني الذي ميله عند (x,y) من نقاطه هو $ax - 3x^2$ وكان المستقيم $9x - y - 4 = 0$ مماسا عند (1,5) جد معادلته

$y' = ax - 3x^2$

ميل المستقيم $9x - y - 4 = 0$ هو

$$\text{ميل} = \frac{-9}{-1} = 9 \Longrightarrow y' = 9$$

نعوض $x = 1$, $y' = 9$ في $y' = ax - 3x^2$

$9 = a(1) - 3(1)^2$

$9 = a - 3 \Longrightarrow a = 9 + 3 \Longrightarrow a = 12$

$y' = 12x - 3x^2$

$y = \int 12x - 3x^2\, dx$

$y = 6x^2 - x^3 + c$

نعوض النقطة

$5 = 6(1)^2 - (1)^3 + c$

$5 = 6 - 1 + c$

$5 = 5 + c \longrightarrow c = 5 - 5 = 0$

معادلة المنحني

$y = 6x^2 - x^3$

==
==

س١ / جد معادلة المنحني الذي ميله عند (x,y) يساوي $\frac{-2}{x^3}$ وكان المنحني يمر بالنقطة (1 , 3)

الحل /

$$y = \int \frac{-2}{x^3} dx = \int -2x^3 dx$$

$y = x^{-2} + c$

النقطة (1,3) تحقق معادلة المنحني وعليه

$3 = 1 + c$

$c = 3 - 1 = 2$

اذن معادلة المنحني $y = x^{-2} + 2$

==

س٢/ جد معادلة المنحني الذي ميله عند (x,y) من نقاطه هي $3x^2 - 6x - 9$ وكان للمنحني نهاية عظمى قيمتها (10)

الحل/ بما ان للمنحني نهاية عظمى في (x,y) تساوي 10 اي ان $f(x) = 0$

$3x^2 - 6x - 9 = 0$

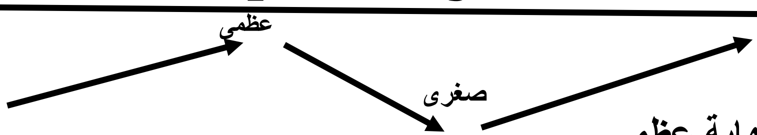
$x^2 - 2x - 3 = 0$

$(x - 3)(x + 1) = 0$

$x - 3 = 0 \Longrightarrow x = 3$

$x + 1 = 0 \Longrightarrow x = -1$

اشارة f (x)   + + + + +   -1 - - - - - -   3   + + + + + +



(10 , 1-) هي التي تمثل نهاية عظمى

$y = \int 3x^2 - 6x - 9\, dx$

$y = x^3 - 3x^2 - 9x + c$

نعوض (10 , 1-) في معادلة المنحني

$10 = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + c$

$10 = -1 - 3 + 9 + c$

$10 = -4 + 9 + c$

$10 = 5 + c \Longrightarrow c = 10 - 5 = 5$

أذاً معادلة المنحني

$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$

س٣/ جد معادلة المنحني الذي مشتقته الثانية $= 6x - 2$ وكان ميله عند النقطة (2 ,5) يساوي (1-)

الحل /

$y = \int 6x - 2\, dx$

$y = 3x^2 - 2x + c$

الميل = 1- = المشتقة الاولى = $x = 2$

$-1 = 3(2)^2 - 2(2) + c$

$-1 = 3(4) - 4 + c$

$-1 = 12 - 4 + c$

$-1 = 8 + c \Longrightarrow c = -1 - 8 = -9$

إذن

$y = 3x^2 - 2x - 9$

$y = \int (3x^2 - 2x - 9)\, dx$

$y = x^3 - x^2 - 9x + c_2$

النقطة (5 , 2) تحقق معادلة المنحني

$5 = (2)^3 - (2)^2 - 9(2) + c_2 \Longrightarrow 5 = 8 - 4 - 18 + c_2$

$5 = -14 + c_2 \Longrightarrow c_2 = 5 + 14 = 19$

اذن معادلة المنحني تكون

$y = x^3 - x^2 - 9x + 19$

س٤/منحني يمر بالنقطتين (3- , 2) , (9 , 1-) وميله عند (x,y) يساوي ax – 5 جد معادلته

الحل /

$$y = \int ax - 5\, dx$$

$$y = \frac{ax^2}{2} - 5x + c$$

نعوض النقطتان (3- , 2) , (9 , 1-) في معادلة المنحني نحصل

$$9 = \frac{a(-1)^2}{2} - 5(-1) + c$$

$$9 = \frac{a}{2} + 5 + c \implies 9 - 5 = \frac{a}{2} + c$$

$$4 = \frac{a}{2} + c \implies 8 = a + 2c \quad \ldots\ldots(1)$$

$$-3 = \frac{a(2)^2}{2} - 5(2) + c$$

$$-3 = \frac{4a}{2} - 10 + c$$

-3 = 2a -10 + c

-3 + 10 = 2a + c

7 = 2a + c --------(2)

14 = 4a + 2c --------(2) × 2

8 = a + 2c --------(1)

بالطرح

6 = 3a ⟶ a = 2

نعوض a = 2 في معادلة رقم 1

8 = 2 + 2c ⟶ 2c = 8 – 2 ⟶ 2c = 6 ⟶ c = 3

أذن معادلة المنحني تكون $y = x^2 - 5x + 3$

التطبيق الاقتصادي للتكامل

١- نرمز للدالة الإيراد الحدي بالرمز M'

٢- نرمز للدالة الإيراد الكلي بالرمز M

٣- نرمز للدالة التكلفة الحدية بالرمز T'

٤- نرمز للدالة التكلفة الكلية بالرمز T

ملاحظ

١- التكلفة الكلية = تكامل التكلفة الحدية $T = \int T'\, dv$

٢- دالة الإيراد الكلي = تكامل دالة الإيراد الحدي $M = \int M'\, dv$

مثال / إذا كانت دالة الإيراد الحدي هي $M' = 8 - 6v - 2v^2$ حيث حجم الإنتاج جد دالة الإيراد الكلي ودالة السعر

الحل /

$$M = \int M'\, dv$$

$$M = \int 8 - 6v - 2v^2 dv$$

$$M = 8v - 3v^2 - \frac{2v^3}{3} + c$$

عندما يكون حجم الإنتاج $v = 0$, $M = 0$ فان

$$0 = 8(0) - 3(0)^2 - \frac{2(0)^3}{3} + c$$

$$c = 0$$

$$M = 8v - 3v^2 - \frac{2v^3}{3}$$

دالة السعر $= \frac{M}{V}$ وتساوي

$$8 - 3v - \frac{2v^2}{3}$$

وذلك بفرض إن كل ما ينتج يباع

مثال٢/ اذا كانت دالة التكلفة الحدية T' هي $T' = 2 + 60v - 5v^2$ حيث v حجم الإنتاج جد دالة التكلفة الكلية علماً $T = 150$

الحل

$$T = \int T' \, dv$$

$$T = \int 2 + 60v - 5v^2 \, dv$$

$$T = 2v + 30v^2 - \frac{5v^3}{3} + c$$

فاذا كانت التكلفة الكلية = 65 عندما حجم الإنتاج $v = 0$ فان

$$65 = 2(0) + 30(0) - \frac{5(0)}{3} + c \implies c = 65$$

أذن دالة التكلفة الكلية تكون

$$T = 2v + 30v^2 - \frac{5v^3}{3} + 65$$

==

س٥/ اذا كانت دالة الايراد الحدي هي $M' = 12 - 8v - v^2$ فأوجد دالة الايراد الكلي ودالة الطلب (السعر) بفرض ان ما ينتج يباع

الحل /

$$M = \int M' \, dv$$

$$M = \int (12 - 8v - v^2) \, dv$$

$$M = 12v - 4v^2 - \frac{v^3}{3} + c$$

حيث ان $M = 0$ اذا كان $V = 0$ وعليه

$$0 = 12(0) - 4(0)^2 - \frac{(0)^3}{3} + c$$

$$0 = 0 - 0 - 0 + C \qquad C = 0$$

اذا دالة الايراد الكلي تكون

$$M = 12v - 4v^2 - \frac{v^3}{3} + c$$

دالة السعر $= \frac{M}{V} =$ وتساوي

$$12 - 4v - \frac{v^2}{3}$$

وذلك بفرض ان كل ما ينتج يباع

س٦/ اذا كانت دالة التكلفة الحدية هي $T' = 1000 - 5v$ حيث v حجم الإنتاج فاوجد دالة التكلفة مع العلم ان التكلفة الثابتة = 150

الحل

$$T = \int T'\, dv$$
$$T = \int 1000 - 5v\, dv$$

$$T = 1000v - \frac{5v^2}{2} + c$$

فاذا كانت التكلفة الكلية = 150 عندما حجم الانتاج $v = 0$ فان

$$150 = 1000(0) - \frac{5(0)^2}{2} + c \Longrightarrow c = 150$$

أذن دالة التكلفة الكلية تكون $T = 1000v - \frac{5v^2}{2} + 150$

==

التكامل المحدد

اذا كانت f(x) دالة مستمرة في الفترة [a , b] وكانت F(x) عكس مشتقة f(x) إي إن $F^{/}(x) = f(x)$ فان

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

حيث a الحد الأدنى للتكامل و b الحد الأعلى للتكامل

ملاحظات /

١ ـ قواعد التكامل المحدد هي نفس قواعد التكامل غير المحدد

٢ ـ في التكامل المحدد لا نضيف ثابت التكامل c

٣ ـ بعد تكامل الدالة نعوض عن قيم a , b أي $F(b) - F(a)$

أمثلة

1) $\int_1^2 (3x^2 + 2x - 2)dx = [\frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} - 2x]_1^2$

$= [x^3 + x^2 - 2x]_1^2$

$=[2^3 + 2^2 - 2(2)] - [1^3 + 1^2 - 2(1)]$

$= [8 + 4 - 4] - [1 + 1 - 2] = 8 - 0 = 8$

---

2) $\int_0^3 \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 16}} dx = \int_0^3 (x^2 + 16)^{\frac{-1}{2}} 2x dx$

$= [2(x^2 + 16)^{\frac{1}{2}}]_0^3$

$= [2\sqrt{x^2 + 16}]_0^3$

$= [2\sqrt{9 + 16}] - [2\sqrt{0 + 16}]$

$= 2\sqrt{25} - 2\sqrt{16}$

$= 2(5) - 2(4) = 10 - 8 = 2$

3) $\int_4^0 x(x-1)(x-2)dx = -\int_0^4 x(x^2-2x-x+2)\,dx$

$= -\int_0^4 x(x^2-3x+2)dx$

$= -\int_0^4 (x^3-3x^2+2x)dx$

$= -[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2]_0^4$

$= -\left[\frac{4^4}{4} - 4^3 + 4^2\right] + [0]$

$= -[64-64+16] = -16$

---

4) $\int_1^{125} \frac{\sqrt{\sqrt[3]{x}-1}}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \int_1^{125} \frac{(x^{\frac{1}{3}}-1)^{\frac{1}{2}}}{(x)^{\frac{2}{3}}}dx$

$= 3\int_1^{125}(x^{\frac{1}{3}}-1)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}\right)dx$

$= [3(\frac{2}{3}(x^{\frac{1}{3}}-1)^{\frac{3}{2}}]_1^{125}$

$= [2(\sqrt[3]{x}-1)^{\frac{3}{2}}]_1^{125}$

$= [2\sqrt{(\sqrt[3]{x}-1)^3}]_1^{125}$

$= \left[2\sqrt{(\sqrt[3]{125}-1)^3}\right] - \left[2\sqrt{(\sqrt[3]{1}-1)^3}\right]$

$= 2\sqrt{4^3} - 2\sqrt[3]{0} = 2\sqrt{64} - 0 = 16$

---

5) $\int_{-6}^{-5} \sqrt[3]{x^2+12x+36}\,dx = \int_{-6}^{-5}\sqrt[3]{(x+6)^2}dx$

$= \int_{-6}^{-5}(x+6)^{\frac{2}{3}}dx$

$= [\frac{3}{5}(x+6)^{\frac{5}{3}}]_{-6}^{-5}$

$= [\frac{3}{5}\sqrt[3]{(x+6)^5}]_{-6}^{-5}$

$= \left[\frac{3}{5}\sqrt[3]{(-5+6)^5}\right] - [\frac{3}{5}\sqrt[3]{(-6+6)^5}$

$= \left[\frac{3}{5}\sqrt[3]{1}\right] - \left[\frac{3}{5}\sqrt[3]{0}\right] = \frac{3}{5} - 0 = \frac{3}{5}$

6) $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}dx = \int_1^4 x^{\frac{-1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}dx = [2x^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}]_1^4$

$= [2\sqrt{x} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3}]_1^4$

$= \left[2\sqrt{4} + \frac{2}{3}\sqrt{4^3}\right] - \left[2\sqrt{1} + \frac{2}{3}\sqrt{1^3}\right]$

$= \left[4 + \frac{2}{3}(8)\right] - \left[2 + \frac{2}{3}\right]$

$= 4 + \frac{16}{3} - 2 - \frac{2}{3} = \frac{12+16-6-2}{3} = \frac{20}{3}$

==

مثال/7 جد قيمة $a \in R$ اذا علمت ان $\int_0^a (2x - 1)dx = 42$

$\int_0^a (2x - 1)dx = 42$

$\rightarrow [x^2 - x]_0^a = 42$

$\rightarrow [a^2 - a] - [0] = 42$

$\rightarrow a^2 - a - 42 = 0$

$(a - 7)(a + 6) = 0$ → $a = 7$ or $a = -6$

==

=

٢٤ رمضان ١٤٣٥هـ المصادف ٢٢ تموز ٢٠١٤

وتم تنقيح وترتيب ٩ رمضان ١٤٣٦ المصادف ٢٦ حزيران ٢٠١٥

مثال8/ جد قيمة $a \in R$ اذا علمت ان $\int_a^2 (3+2x)dx = 6$

$$\int_a^2 (3+2x)dx = 6$$

$$\rightarrow [3x + x^2]_a^2 = 6$$

$$\rightarrow [3(2) + 2^2] - [3a + a^2] = 6$$

$$\rightarrow 10 - 3a - a^2 - 6 = 0$$

$$\rightarrow a^2 + 3a - 4 = 0$$

$$(a+4)(a-1) = 0$$

$$a = -4 \qquad or \qquad a = 1$$

تمارين(3-4) ص129

$$2)\ \int_{-1}^1 (x^2+3)(x-2)dx = \int_{-1}^1 x^3 - 2x^2 + 3x - 6)dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 6x\right]$$

$$= \left[\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{3}{2} - 6\right] - \left[\frac{1}{4} + \frac{2}{3} + \frac{3}{2} + 6\right]$$

$$= \frac{-4}{3} - 12$$

$$= \frac{-4}{3} - \frac{36}{3} = \frac{-40}{3}$$

$$4)\ \int_0^4 \sqrt{x}\,(x+1)^2\,dx = \int_0^4 x^{\frac{1}{2}}\,(x^2+2x+1)dx$$

$$= \int_0^4 \left(x^{\frac{5}{2}} + 2x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}}\right)dx$$

$$= [\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + 2(\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}) + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}]_0^4$$

$$= [\frac{2}{7}\sqrt{x^7} + \frac{4}{5}\sqrt{x^5} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3}]_0^4$$

$$= \left[\frac{2}{7}\sqrt{4^7} + \frac{4}{5}\sqrt{4^5} + \frac{2}{3}\sqrt{4^3}\right] - [0]$$

$$= \frac{2}{7}(2)^7 + \frac{4}{5}(2)^5 + \frac{2}{3}(2)^3$$

$$= \left[\frac{2}{7}(128) + \frac{4}{5}(32) + \frac{2}{3}(8)\right]$$

$$= \frac{256}{7} + \frac{128}{5} + \frac{16}{3}$$

$$= \frac{3840+2688+560}{105} \quad = \frac{7088}{105}$$

$$6)\ \int_{-1}^0 \frac{x^3-27}{x-3}dx = \int_{-1}^0 \frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{x-3}dx$$

$$= \int_{-1}^0 (x^2+3x+9)dx$$

$$= [\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 9x]_{-1}^0$$

$$= [0] - 13 + \frac{3}{2} - 9$$

$$= \frac{2}{6} - \frac{9}{6} + \frac{54}{6} = \frac{47}{6}$$

$$8)\ \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2+1)^{\frac{-1}{2}}(2xdx)$$

$$= \frac{1}{2}\left[2(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\right]_0^1$$

$$= [\sqrt{x^2+1}]_0^1$$

$$= \left[\sqrt{1+1}\right] - \left[\sqrt{0+1}\right]$$

$$= \sqrt{2} - 1$$

10) $\int_0^3 \sqrt[3]{(3x-1)^2}\, dx = \frac{1}{3}\int_0^3 (3x-1)^{\frac{2}{3}} 3dx$

$= \frac{1}{3}\left[\frac{3}{5}(3x-1)^{\frac{5}{3}}\right]_0^3$

$= \frac{1}{5}\left[\sqrt[3]{(3x-1)^5}\right]_0^3$

$= \frac{1}{5}\left[\sqrt[3]{(9-1)^5} - \sqrt[3]{(0-1)^5}\right]$

$= \frac{1}{5}\left[2^5 - (-1)^5\right]$

$= \frac{1}{5}[32+1] = \frac{33}{5}$

==

14) $\int_0^8 \sqrt{x^2-14x+49}\, dx = \int_0^8 \sqrt{(x-7)^2} dx = \int_0^8 (x-7) dx$

$= \int_0^7 (7-x)dx + \int_7^8 (x-7)dx = [7x - \frac{x^2}{2}]_0^7 + [\frac{x^2}{2} - 7x]_7^8$

$= \left[49 - \frac{49}{2}\right] - [0] + \left[\frac{64}{2} - 56\right] - \left[\frac{49}{2} - 49\right]$

$\sqrt{(x-7)^2} = |x-7|$
$= \begin{cases} x-7 & x \geq 7 \\ 7-x & x < 7 \end{cases}$

$= \left[\frac{98}{2} - \frac{49}{2}\right] + \left[\frac{64}{2} - \frac{112}{2}\right] - \left[\frac{49}{2} - \frac{98}{2}\right] = \frac{49}{2} - \frac{64}{2} + \frac{49}{2} = \frac{50}{2} = 25$

==

16) $\int_{-1}^1 \sqrt[5]{3x^5 - 2x^7}\, dx = \int_{-1}^1 \sqrt[5]{x^5(3-2x^2} dx$

$= \int_{-1}^1 x \sqrt[5]{(3-2x^2} dx$

$= \frac{-1}{4}\int_{-1}^1 ((3-2x^2)^{\frac{1}{5}}(-4x)dx$

$= \left[\frac{-1}{4}\left(\frac{5}{6}\right)(3-2x^2)^{\frac{6}{5}}\right]_{-1}^1$

$= [(\frac{-5}{24})(\sqrt[5]{3-2x^2)^6}]_{-1}^1$

$= \left[\frac{-5}{24}\sqrt[5]{3-2)^6}\right] - \left[\frac{-5}{24}\sqrt[5]{3-2)^6}\right]$

$= \frac{-5}{24}\sqrt[5]{1} + \frac{5}{24}\sqrt[5]{1}$

$= \frac{-5}{24} + \frac{5}{24} = 0$

مثال7/ جد قيمة $b \in R$ اذا علمت ان $\int_1^b (13-4x)dx = 9$

$$\int_1^b (13-4x)dx = 9$$

$$\rightarrow [13x - 2x^2]_1^b = 9$$

$$\rightarrow [13(b) - 2b^2] - [13 - 2] = 9$$

$$\rightarrow 13b - 2b^2 - 11 - 9 = 0$$

$$2b^2 - 13b + 20 = 0$$

$$(2b-5)(b-4) = 0$$

$$2b - 5 = 0 \Longrightarrow 2b = 5 \Longrightarrow b = \frac{5}{2}$$

$$or \quad b - 4 = 0 \Longrightarrow b = 4$$

أعداد الأستاذ عبدالسلام محمد علي　　٢٤ رمضان ١٤٣٥هـ المصادف ٢٢ تموز ٢٠١٤

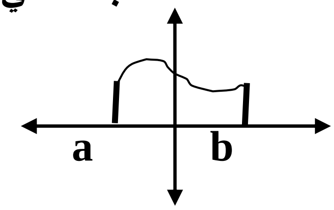
٠٧٨١١١٩١١٠٠ or ٠٧٧١٢٤٤٠٠٥٥

تطبيقات على التكامل المحدد

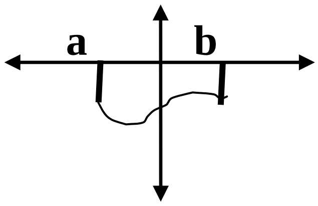
١ـ المساحة المحدد بمنحني الدالة ومحور السينات

المساحة المحدد لمنحني الدالة $y = f(x)$ ومحور السينات والمستقيمين $x = a$, $x = b$ هي :

أـ عندما يكون $f(x) > 0$ اي ان المنحني فوق محور السينات فأن المساحة المحدد بالمنحني والمستقيمين والتي يرمز لها بالرمز A هي $A = \int f(x)\, dx$



ب- عندما يكون $f(x) < 0$ اي ان المنحني تحت محور السينات فأن المساحة المحدد بالمنحني والمستقيمين والتي يرمز لها بالرمز A هي $A = - \int f(x)\, dx$



ملاحظة / لإيجاد المساحة المحدد بمنحني الدالة ومحور السينات نتبع الخطوات التالية

١ـ نجد نقاط تقاطع المنحني ومحور السينات وذلك بتعويض عن $y = 0$ بالدالة ونجد قيم x

٢ـ تلاحظ قيم x هل تجزأ الفترة ام لا تجزأ

٣ـ اذا لم يعطي الفترة في السؤال نجعل قيم x هي الفترة

٤ـ نكون جدول لمعرفة المنحني هل يقع فوق ام تحت محور السينات على كل فترة

مثال/جد المساحة المحدد بمنحني الدالة $y = f(x) = x^2 - 2x - 3$ ومحور السينات على [-1 , 3]

الحل / التقاطع مع محور السينات اي نجعل $y = 0$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$(x - 3)(x + 1) = 0$

$x - 3 = 0 \Longrightarrow x = 3$

$x + 1 = 0 \Longrightarrow x = -1$

$$A = \left|\int_{-1}^{3}(x^2 - 2x - 3)dx\right| = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} - 3x\right]_{-1}^{3}$$

$$= \left|\left[\frac{3^3}{3} - 3^2 - 3(3)\right] - \left[\frac{(-1)^3}{3} - (-1)^2 - 3(-1)\right]\right|$$

$$= \left|\left[\frac{27}{3} - 9 - 9\right] - \left[-\frac{1}{3} - 1 + 3\right]\right|$$

$$= \left|(9 - 9 - 9) - \left(\frac{1}{3} + 2\right)\right| = \left|9 - \frac{1}{3} + 2\right|$$

$$= \left|\frac{27}{3} - \frac{1}{3} + \frac{6}{3}\right| = \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3}unit^2$$

==

مثال٢/جد المساحة بين منحنى الدالة $y = f(x) = \sqrt{x+1}$ ومحور السينات والمستقيمين $x = 0 , x = 3$

الحل / التقاطع مع محور السينات اي نجعل $y = 0$

$$\sqrt{x+1} = 0 \Longrightarrow x + 1 = 0 \Longrightarrow x = -1 \Longrightarrow -1 \notin [0, 3]$$

$$A = \left|\int_{0}^{3}\sqrt{x+1}dx\right| = \left|\int_{0}^{3}(x+1)^{\frac{1}{2}}dx\right|$$

$$= \left|\left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3\right| = \left|\left[\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}\right]_0^3\right|$$

$$= \left|\left[\frac{2}{3}\sqrt{(3+1)^3}\right] - \left[\frac{2}{3}\sqrt{(0+1)^3}\right]\right|$$

$$= \left|\frac{2}{3}(2)^3 - \frac{2}{3}\right|$$

$$= \left|\frac{16}{3} - \frac{2}{3}\right| = \left|\frac{14}{3}\right| = 4\frac{2}{3}\text{unit}^2$$

مثال٣/جد المساحة المحدد بالدالة $y = f(x) = x^3 - x$ ومحور السينات

الحل / التقاطع مع محور السينات اي نجعل $y = 0$

$x^3 - x = 0$

$x(x^2 - 1) = 0$

$x(x - 1)(x + 1) = 0$

$x = 0$

or $x - 1 = 0$ $\qquad x = 1$

or $x + 1 = 0$ $\qquad x = -1$

الفترات تصبح [0 , 1] , [-1 ,0]

$$A = A_1 + A_2 = \left|\int_{-1}^{0}(x^3 - x)dx\right| + \left|\int_{0}^{1}(x^3 - x)dx\right|$$

$$= \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}\right| + \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1}\right|$$

$$= \left|[0] - \left[\frac{-1^4}{4} - \frac{-1^2}{2}\right]\right| + \left|\left[\frac{(1)^4}{4} - \frac{1^2}{2}\right] - [0]\right|$$

$$= \left|-\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right]\right| + \left|\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right|$$

$$= \left|\frac{1}{4}\right| + \left|\frac{1}{4}\right|$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}unit^2$$

س١/جد المساحة بين منحني الدالة $y = f(x) = x^3 - 4x$ ومحور السينات والمستقيمين $x = -2 , x=2$

الحل / المستقيمين $x = 2$, $x = -2$ يكافئ على الفترة $[-2 , 2]$

تقاطع المنحني مع محور السينات وذلك بجعل $y = 0$

$x^3 - 4x = 0 \Longrightarrow x(x^2 - 4) = 0$

$x(x - 2)(x + 2) = 0$

$x = 0$ or $x = 2$ or $x = -2$ $[-2 , 2]$

الفترات تصبح $[-2 ,0] , [0 , 2]$

$$A = |A_1| + |A_2| = \left|\int_{-2}^{0}(x^3 - 4x)dx\right| + \left|\int_{0}^{2}(x^3 - 4x)dx\right|$$

$$= \left|[\frac{x^4}{4} - 2x^2]_{-2}^{0}\right| + \left|[\frac{x^4}{4} - 2x^2]_{0}^{2}\right|$$

$$= \left|[0] - \left[\frac{(-2)^4}{4} - 2(-2)^2\right]\right| + \left|\left[\frac{-(2)^4}{4} + 2(2)^2\right] - [0]\right|$$

$$= |-[4 - 8]| + |4 - 8| = 4 + 4 = 8unit^2$$

===

س٢/جد المساحة المحدد بمنحني الدالة $y = f(x) = x^4 - x^2$ ومحور السينات على $[-1 , 1]$

الحل / تقاطع المنحني مع محور السينات وذلك بجعل $y = 0$

$x^4 - x^2 = 0 \Longrightarrow x^2(x^2 - 1) = 0$

$x = 0$ or $x = 1$ or $x = -1$ $[-1 , 1]$

الفترات تصبح $[-1 ,0] , [0 , 1]$

$$A = A_1 + A_2 = \left|\int_{-1}^{0}(x^4 - x^2)dx\right| + \left|\int_{0}^{1}(x^4 - x^2)dx\right|$$

$$= \left|[\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}]_{-1}^{0}\right| + \left|[\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}]_{0}^{1}\right|$$

$$= \left|[0] - \left[\frac{(-1)^5}{5} - \frac{(-1)^3}{3}\right]\right| + \left|\left[\frac{1^5}{5} - \frac{1^3}{3}\right] - [0]\right|$$

$$= \left|\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right| + \left|\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right|$$

$$= \left|\frac{3}{15} - \frac{5}{15}\right| + \left|\frac{3}{15} - \frac{5}{15}\right| = \frac{2}{15} + \frac{2}{15} = \frac{4}{15}$$

س٣/جد المساحة المحدد بالدالة $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ ومحور السينات

الحل /

تقاطع المنحني مع محور السينات وذلك بجعل $y = 0$

$x^3 - 3x^2 + 2x = 0$

$x(x^2 - 3x + 2) = 0$

$x(x - 2)(x - 1) = 0$

$x = 0$ or $x = 2$ or $x = 1$

الفترات تصبح $[0, 1], [1, 2]$

$$A = A_1 + A_2 = \left|\int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)dx\right| + \left|\int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x)dx\right|$$

$$= \left|\left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right]_0^1\right| + \left|\left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right]_1^2\right|$$

$$= \left|\left[\frac{1}{4} - 1 + 1\right] - [0]\right| + \left|\left[-\frac{2^4}{4} + 2^3 - 2^2\right] - \left[-\frac{1}{4} + 1 - 1\right]\right|$$

$$= \left|\frac{1}{4}\right| + \left|(-4 + 8 - 4) - \frac{1}{4}\right|$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} unit^2$$

المساحة بين منحني دالتين

مثال/جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين $y = f(x)= x$, $y= g(x) = x^3$

الحل / نولد دالة الجديدة ولتكن

$R(x) = f(x) – g(x)$

$R(x) = x – x^3$

التقاطع مع محور السينات اي نجعل $y = 0$

$x - x^3 = 0$

$x(1 - x^2) = 0$

$x(1 – x)(1 + x) = 0$

$x = 0$

or $x = 1$ or $x = – 1$

الفترات تصبح $[-1 ,0] , [0 , 1]$

$$A = A_1 + A_2 = \left|\int_{-1}^{0}(x - x^3)dx\right| + \left|\int_{0}^{1}(x - x^3)dx\right|$$

$$= \left|\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{0}\right| + \left|\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_{0}^{1}\right|$$

$$= \left|[0] - \left[\frac{(-1)^2}{2} - \frac{(-1)^4}{4}\right]\right| + \left|\left[\frac{1^2}{2} - \frac{1^4}{4}\right] - [0]\right|$$

$$= \left|-\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right]\right| + \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right|$$

$$= \left|-\frac{1}{4}\right| + \left|\frac{1}{4}\right|$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}unit^2$$

مثال / لتكن $y = f(x) = x$ وعلى الفترة [-1 , 1] , $y = g(x) = \sqrt[3]{x}$ وعلى الفترة [-1 , 1]
جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين

الحل / نولد دالة الجديدة ولتكن

$R(x) = f(x) - g(x)$

$R(x) = x - \sqrt[3]{x}$

التقاطع مع محور السينات اي نجعل $y = 0$

$x - \sqrt[3]{x} = 0 \Longrightarrow x = \sqrt[3]{x} \Longrightarrow x^3 = x$

$x^3 - x = 0 \qquad x(x^2 - 1) = 0$

$x(x - 1)(x + 1) = 0$

$x = 0$ or $x = 1$ or $x = -1$

الفترات تصبح [-1 ,0] , [0 , 1]

$$A = |A_1| + |A_2| = \left|\int_{-1}^{0}\left(x - x^{\frac{1}{3}}\right)dx\right| + \left|\int_{0}^{1}\left(x - x^{\frac{1}{3}}\right)dx\right|$$

$$= \left|\left[\frac{x^2}{2} - \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\right]_{-1}^{0}\right| + \left|\left[\frac{x^2}{2} - \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\right]_{0}^{1}\right|$$

$$= \left|\left[\frac{x^2}{2} - \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}\right]_{-1}^{0}\right| + \left|\left[\frac{x^2}{2} - \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}\right]_{0}^{1}\right|$$

$$= \left|[0] - \left[\frac{(-1)^2}{2} - \frac{3}{4}\sqrt[3]{(-1)^4}\right]\right| + \left|\left[\frac{1^2}{2} - \frac{3}{4}\sqrt[3]{1^4}\right] - [0]\right|$$

$$= \left|-\left[\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right]\right| + \left[\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right]$$

$$= \left|\frac{1}{4}\right| + \left|\frac{1}{4}\right| = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}\,unit^2$$

س٤/ جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين $f(x) = \sqrt{x-1}$ ، $g(x) = \frac{1}{2}x$

والمستقيمين $x = 5$, $x = 2$

الحل / نولد دالة الجديدة ولتكن

$$R(x) = f(x) - g(x)$$

$$R(x) = \frac{1}{2}x - \sqrt{x-1}$$

التقاطع مع محور السينات اي نجعل $y = 0$

$$\frac{1}{2}x - \sqrt{x-1} = 0$$

$$\frac{1}{2}x = \sqrt{x-1}$$

$$\frac{1}{4}x^2 = x - 1$$

$$x^2 = 4x - 4$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$(x-2)^2 = 0$$

$$x - 2 = 0 \Longrightarrow x = 2$$

الفترات تصبح [2 , 5]

$$A = \left| \int_2^5 \frac{1}{2}x - \sqrt{x-1}\, dx = \int_2^5 \frac{1}{2}x - (x-1)^{\frac{1}{2}} dx \right|$$

$$= \left| \left[\frac{1}{4}x^2 - \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} \right]_2^5 \right|$$

$$= \left| \left[\frac{1}{4}x^2 - \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3} \right]_2^5 \right|$$

$$= \left| \left[\frac{1}{4}(5)^2 - \frac{2}{3}\sqrt{(5-1)^3} \right] - \left[\frac{1}{4}(2)^2 - \frac{2}{3}\sqrt{(2-1)^3} \right] \right|$$

$$= \left| \left[\frac{25}{4} - \frac{16}{3} \right] - \left[\frac{4}{4} - \frac{2}{3} \right] \right|$$

$$= \left| \frac{21}{4} - \frac{14}{3} \right|$$

$$= \left| \frac{63}{12} - \frac{56}{12} \right| = \frac{7}{12} \text{unit}^2$$

س٥/جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين $y = x^4 - 12$ ، $y = x^2$

الحل / نولد دالة الجديدة ولتكن

$R(x) = f(x) - g(x)$

$R(x) = x^2 - 12 - x^2 = x^4 - x^2 - 12$

التقاطع مع محور السينات اي نجعل $y = 0$

$x^4 - x^2 - 12 = 0$

$(x^2 - 4)(x^2 + 3) = 0$

$x^2 - 4 = 0 \Longrightarrow x^2 = 4 \Longrightarrow x = \pm 2$

$x^2 + 3 \neq 0$

الفترات تصبح $[-2, 2]$

$$A = \int_{-2}^{2} R(x) = \left| \int_{-2}^{2} (x^4 - x^2 - 12) dx \right|$$

$$= \left| \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} - 12x \right]_{-2}^{2} \right|$$

$$= \left| \left[\frac{2^5}{5} - \frac{2^3}{3} - 12(2) \right] - \left[\frac{(-2)^5}{5} - \frac{(-2)^3}{3} - 12(-2) \right] \right|$$

$$= \left| \frac{32}{5} - \frac{8}{3} - 24 + \frac{32}{5} - \frac{8}{3} - 24 \right| = \left| \frac{64}{5} - \frac{16}{3} - 48 \right|$$

$$= \left| \frac{192}{15} - \frac{80}{15} - \frac{720}{15} \right| = \frac{608}{15}$$

==

أمنياتي لكم بالنجاح

مدرس المادة عبدالسلام محمد علي